

Chapitre extrait de
La représentation de l'espace chez l'enfant.

1^{ère} éd. Paris : PUF, 1948. 2^e édition 1972.

La présente version électronique a été réalisée par les soins de la Fondation
Jean Piaget pour recherches psychologiques et épistémologiques.

La pagination est conforme à celle de la 2^e édition.

CHAPITRE XV

CONCLUSIONS :

L' « INTUITION DE L'ESPACE »

Qu'est-ce que l'intuition géométrique ? C'est ce que tout mathématicien demandera que l'on précise au terme de ces quelques études de psychologie consacrées à la représentation de l'espace chez l'enfant.

L'opinion commune tend à voir dans cette intuition essentiellement une lecture, lecture perceptive du monde extérieur, d'abord, et lecture par l'image, ensuite, de ce que la perception a fourni ou pourrait fournir encore. « Nous avons plusieurs sortes d'intuitions, disait Poincaré en un message célèbre ; d'abord l'appel aux sens et à l'imagination, ensuite la généralisation par induction calquée pour ainsi dire, sur les procédés des sciences expérimentales ; nous avons enfin l'intuition du nombre pur »¹. C'est de la première de ces manières que l'on considère en général l'intuition géométrique, ou des deux premières, mais en ramenant alors le raisonnement inductif à l'imagination d'une expérience perceptive possible. Or, il est exact que l'intuition spatiale recourt en partie aux sens et à l'imagination : le point, que l'on ne peut s'empêcher de « voir » sous la forme d'une très petite surface ronde, ou la ligne, qu'on se représente comme un ruban très mince, sont des exemples usés, mais toujours probants, de cette servitude sensible de l'intuition.

Mais, de réduire l'intuition spatiale à ce seul appel aux sensations et à l'imagination, ce serait en méconnaître autant la nature que les psychologues associationnistes déformaient celle de la pensée en la réduisant à un système d'images, et en considérant l'image comme un élément, sinon comme l'élément unique, de cette pensée elle-même. L'un des résultats les

1. *La valeur de la science*, p. 22.

plus clairs des expériences décrites en cet ouvrage est au contraire de nous avoir montré que l'image et la matière sensible jouent dans l'intuition géométrique, exactement le même rôle qu'en toute pensée : celui de symbole ou de « signifiant », par opposition aux rapports « signifiés ».

Il est vrai que les mathématiciens, lorsqu'ils nous décrivent l'intuition en termes de sensations et d'images, le font en général dans une intention opposée à celle des anciens empiristes : c'est pour en condamner la valeur démonstrative, et non pas pour la justifier. L'intuition nous trompe, s'accordent-ils presque tous à affirmer. « Les deux premières ne peuvent nous donner la certitude », ajoute Poincaré après avoir distingué ces trois formes d'intuition rappelées à l'instant. L'intuition, dit-on ordinairement, est instrument d'invention, mais la démonstration, c'est-à-dire le raisonnement géométrique lui-même, est affaire de logique et d'analyse. La géométrie moderne s'est même efforcée de dissocier aussi complètement que possible le raisonnement de l'intuition, en constituant la méthode axiomatique.

Seulement, tout n'est pas dit ainsi, et, que la réduction de l'intuition aux « sens » et à l'imagination serve à la défendre ou à la condamner, cette erreur de psychologie demeure une erreur, et dont les conséquences pèsent même parfois lourdement sur la discussion des problèmes généraux de l'épistémologie géométrique. Il s'est, en effet, avéré que la dissociation radicale du domaine intuitif et de celui de la logique pure ou de l'axiomatique était, en fait, irréalisée et même, en droit, irréalisable. Ce n'est pas ici le lieu d'insister sur la multiplicité, non seulement des significations accordées par les auteurs au terme d'intuition, mais encore des variétés d'intuitions distinguées précisément pour combler, après coup, le fossé artificiellement ouvert entre l'intuitif et le logique : il y a l'intuition qui, selon Poincaré, préside à la direction générale de la pensée (par opposition aux opérations logiques particulières), et dont L. Brunschvicg disait qu'elle désigne alors simplement « le travail profond de l'intelligence »¹ ; il y a l'intuition « trans-intuitive » de M. Winter² ; il y a surtout, opposée à l'« intuition naïve », l'« intuition raffinée » de F. Klein, dont ce grand mathématicien ajoutait qu'elle « n'est pas du tout, à proprement parler, une intuition »³ ; il y a enfin l'intuition selon Brouwer,

1. L. BRUNSCHVICG, *Les étapes de la philosophie mathématique*, p. 451.

2. *Revue de Métaph. et de Morale*, 1908, p. 922. Voir aussi A. REYMOND, *ibid.*, 1916, p. 740.

3. Cité par L. BRUNSCHVICG, *Étapes*, p. 450.

qui est une construction opératoire¹. Bref, toutes les transitions ont été invoquées pour relier l'intuition élémentaire aux opérations rationnelles ; c'est ce qu'a, en particulier, profondément montré L. Brunschvicg : il reste toujours, dans le raisonnement géométrique, quelque attache avec l'expérience intuitive, mais, inversement, dès la prise de contact la plus primitive avec l'expérience intervient déjà l'intelligence nécessaire à son organisation spatiale. C'est une thèse voisine qu'a soutenue récemment F. Gonseth : le « schéma » en quoi consiste l'axiomatique logique conserve toujours quelque résidu d'intuition, mais l'intuition initiale requiert dès l'abord un certain schématisme pour se structurer².

La leçon de tout cela est évidemment que, pour le mathématicien lui-même, l'intuition est déjà bien plus qu'un système de perceptions ou d'images ; elle est l'intelligence élémentaire de l'espace, à un niveau encore non formalisé. Mais alors réapparaît le problème génétique : d'où vient que cette intelligence puisse s'installer dans le réel si directement qu'elle en paraisse la copie perceptive ou imagée, et ensuite s'en libérer si parfaitement qu'elle semble lui opposer les constructions déductives les plus autonomes et les plus propres au sujet lui-même ?

A cet égard, les expériences contenues en cet ouvrage fournissent la plus simple des réponses : l'intuition de l'espace n'est pas une lecture des propriétés des objets, mais bien, dès le début, une action exercée sur eux ; et c'est parce que cette action enrichit la réalité physique, au lieu d'en extraire sans plus des structures toutes formées, qu'elle parvient à la dépasser peu à peu, jusqu'à constituer des schémas opératoires susceptibles d'être formalisés et de fonctionner déductivement par eux-mêmes. De l'action sensori-motrice élémentaire à l'opération formelle, l'histoire de l'intuition géométrique est donc celle d'une activité proprement dite, d'abord liée à l'objet auquel elle s'accommode, mais en l'assimilant à son propre fonctionnement jusqu'à la transformer autant que la géométrie a transformé la physique.

C'est dès la prise de contact perceptive avec l'expérience que se manifeste cette action, sous les espèces d'une activité sensori-motrice réglant les perceptions : à ce niveau déjà, l'élément sensible se borne à servir de « signifiant », tandis que

1. Rolin WAVRE, *Mathématiques et philosophie*, *Arch. soc. belge de philos.*, 1933, p. 9.

2. F. GONSETH, *Les mathématiques et la réalité*, Paris, P.U.F.

l'assimilation active et motrice construit les rapports eux-mêmes. C'est ce qu'a pressenti Poincaré dans le rôle attribué par lui aux mouvements, sources des connaissances spatiales les plus élémentaires, mais au lieu d'apercevoir la relation générale entre ces mouvements et les opérations ultérieures de l'intelligence (malgré ses pages célèbres sur l'origine motrice du groupe des déplacements), il a décrit les mouvements en termes de sensations et maintenu à côté d'elles un *a priori* rationnel chargé de les diriger.

C'est ensuite au niveau de la représentation naissante, que l'action développe son rôle formateur : l'image n'est jamais que l'imitation intérieure et symbolique d'actions antérieurement exécutées, d'abord, puis simplement exécutables, dont nous avons constaté l'importance dans la construction des formes, à partir des rapports topologiques élémentaires de voisinage, d'ordre et d'enveloppement.

C'est enfin aux niveaux des opérations concrètes, puis formelles, que l'action se retrouve en jeu, mais sous la forme à la fois enrichie et épurée des opérations elles-mêmes, lesquelles sont plus riches que les actions initiales, parce que devenues réversibles et susceptibles de composition indéfinies, mais plus pures parce que dépassant désormais d'autant les objets sur lesquels elles portent. Or, l'intérêt de ces opérations constitutives de l'espace est triple. En premier lieu leur ordre de succession génétique est, dans les grandes lignes, parallèles à l'ordre de la construction axiomatique de la géométrie, puisque les rapports topologiques précèdent dans les deux cas les structures projectives et euclidiennes et que ces dernières se trouvent dans les deux cas en une situation d'équivalence du point de vue de la complexité de leurs notions de départ.

En second lieu, l'intérêt des mêmes opérations, envisagées génétiquement, est d'introduire un fait nouveau dans le débat classique qui met aux prises l'intuition et la logique : c'est que, dans la mesure où les actions s'intériorisent en opérations, les intuitions perceptives et pratiques du début deviennent cohérentes et rationnelles avant même d'être formalisées, le système des opérations concrètes dépassant donc en rigueur le niveau intuitif élémentaire, sans atteindre celui des opérations formelles, sources des propositions hypothético-déductives. De nouveaux échelons entre l'intuition et la logique sont donc à introduire, dont le principal est celui de la logique des opérations concrètes, supérieure à la prélogique intuitive et inférieure à la logique formelle.

Mais surtout, en troisième lieu, le système des opérations concrètes permet de mettre en évidence un autre fait nouveau intéressant les relations entre l'intuition et la logique : c'est que, en parallèle exact avec les opérations concrètes de caractère logico-arithmétique, portant exclusivement sur les ressemblances (classes et relations symétriques), les différences (relations asymétriques) ou les deux à la fois (nombres), entre objets discrets, réunis en ensembles discontinus et indépendants de leur configuration spatio-temporelle, il existe des opérations concrètes de caractère infralogique ou spatio-temporel qui sont précisément constitutives de l'espace.

Ce terme d'infralogique ne signifie nullement que ces opérations soient inférieures en rigueur aux opérations logico-arithmétiques, mais simplement qu'elles sont formatrices de la notion de l'objet comme tel, par opposition aux ensembles d'objets (c'est-à-dire, si l'on veut s'exprimer dans le langage de la « théorie des types » de Russel, qu'elles sont en deçà du type 0, c'est-à-dire précisément infralogiques). Ces opérations, qui portent non plus sur des emboîtements de classes, mais sur des emboîtements de parties d'un même objet dans l'objet total remplacent la notion de ressemblance par celle de voisinage, la notion de différence en général par celle de différence d'ordre ou de placement (en particulier par celle de déplacement) et la notion de nombre par celle de mesure. Une fois formalisées, c'est-à-dire traduites dans le langage des propositions hypothético-déductives, elles ne se distinguent plus des opérations logico-arithmétiques, dont elles constituent simplement un domaine spécial : celui du continu par opposition à celui du discontinu. Mais, sur le plan des opérations concrètes, elles constituent un système total, aussi complet que celui des opérations logico-arithmétiques, et constitutif des « objets » de divers ordres, que la logique et l'arithmétique peuvent réunir en ensembles ou en collections numériques. En tant que constitutives des objets comme tels, ces opérations infralogiques sont accompagnées de symboles imagés (images mentales ou représentations figurées) qui leur sont beaucoup plus adéquats (sans l'être d'ailleurs totalement) que les images pouvant accompagner la notion d'une classe quelconque (ou d'un nombre). C'est pourquoi l'on admet souvent la persistance d'un résidu intuitif jusqu'au sein des axiomatiques géométriques les plus épurées : ce résidu n'est pas autre chose que l'attestation de l'origine infralogique des notions fondamentales de voisinage et d'ordre spatial.

Au total il y a donc continuité complète, dans ce que les mathématiciens appellent l'intuition géométrique, entre l'élément moteur, qui dirige déjà l'activité perceptive, et celui que l'on retrouve aux différents paliers du développement jusqu'à l'opération finale ; les éléments sensibles remplissent au contraire simplement, à chaque étape successive, le rôle de « signifiants », de l'indice perceptif au symbole imagé le plus élevé.

§ 1. PERCEPTION ET REPRÉSENTATION DE L'ESPACE : LE RÔLE DE L'IMAGE. — Une première distinction essentielle à introduire dans la série des échelons que nous avons étudiés est celle de la perception même de l'espace et des premières représentations imaginées. Il se produit, en effet, ceci que, la perception spatiale se constituant en contact direct avec l'objet, tandis que l'image intervenant en son absence, l'espace perceptif se construit beaucoup plus rapidement que l'espace représentatif : il atteint même un niveau déjà projectif et quasi métrique au moment où débute la représentation imagée, et où celle-ci en demeure à la construction, et en partie à la reconstruction, des rapports topologiques élémentaires. Il y a donc un décalage, et même de quelques années, entre les deux constructions perceptive et représentative, malgré l'analogie de leurs processus évolutifs, de telle sorte que, si l'on n'aperçoit pas la dualité des plans, on a l'illusion que l'élaboration de l'espace débute avec les formes euclidiennes simples. Or, lorsqu'on les observe vers l'âge de 2 à 4 ans, celles-ci sont à la fois dérivées, du point de vue perceptif (parce que préparées par un développement qui débute dès les premières semaines de l'existence), et non encore assimilées par la représentation (laquelle travaille sur ces formes perceptives complexes, mais au moyen de rapports beaucoup plus élémentaires). Il est donc indispensable de dissocier l'espace perceptif de l'espace représentatif, pour fournir une théorie adéquate de l'intuition géométrique.

L'espace perceptif nous est apparu lui-même comme étant déjà un produit complexe, résultant à la fois de la perception comme telle, et d'une activité sensori-motrice dirigeant et coordonnant les divers mouvements qui déterminent les centrations perceptives. Cette activité sensori-motrice englobe l'ensemble des conduites du nourrisson, puis se spécialise, après l'apparition de la représentation, dans les domaines moteur et perceptif qui continuent, durant toute l'existence, de constituer la substructure des constructions représentatives. Au cours de la première année, c'est donc une activité sensori-motrice

générale qui conduit le sujet, par la manipulation des objets, leur déplacement, leur rotation, etc., à attribuer à ceux-ci une forme et une grandeur constante, outre la permanence substantielle dont ils sont dotés lorsqu'ils disparaissent du champ perceptif. Dans la suite, c'est la même activité, mais spécialisée dans l'organisation des mouvements de l'œil, etc., qui rend compte des régulations déterminant l'évaluation des grandeurs à distance ou des formes en perspective.

Or, dans la mesure où intervient une telle activité sensori-motrice dès le niveau de l'espace perceptif, il est déjà possible de distinguer, quoique à l'état relativement indifférencié, les deux fonctions complémentaires qui remplissent la sensibilité et la motricité : les rapports spatiaux eux-mêmes sont élaborés grâce à cette dernière, mais dès leur construction et surtout une fois construits, ils sont « signifiés » grâce à des « signifiants » consistant précisément en indices sensoriels. C'est ainsi que, dans une forme vue en perspective, ou en profondeur, il interviendra une série de « rapports virtuels » dépassant les données enregistrées telles quelles par les organes récepteurs. Or, ces rapports virtuels sont un produit de la motricité, tandis que l'élément sensoriel actuel remplit à leur égard la fonction d'indice.

Mais l'activité sensori-motrice ne saurait à elle seule franchir les bornes du champ des objets présents, en contact direct avec le sujet. Tout au plus parvient-elle à certaines anticipations et reconstitutions, qui lui permettent de situer l'objet derrière des écrans ou de grouper les déplacements selon certains « détours ». Mais là s'arrête son pouvoir et c'est à la représentation à étendre le champ spatial au-delà des limites du champ perceptif.

C'est à partir du moment où apparaît la fonction symbolique, c'est-à-dire où se différencient les « signifiants », sous forme de symboles (images) ou de signes (mots), et les « signifiés », sous forme de rapports préconceptuels ou conceptuels¹, que la représentation se surajoute à l'activité sensori-motrice. C'est à ce niveau que débute l'espace représentatif, objet propre de notre étude.

Le premier problème que l'on rencontre alors est celui du rôle respectif de l'imagination et de l'action comme telle. Doit-on dire, à cet égard, que la représentation spatiale n'a plus rien à voir vers l'action, étant simplement l'évocation des résultats d'une action possible (ou passée) par le moyen des signes et des

1. Voir notre ouvrage sur *La formation du symbole chez l'enfant*, Delachaux & Niestlé, 1945.

symboles, et non plus cette action elle-même, ou doit-on dire au contraire qu'elle est une action intériorisée, c'est-à-dire reproduite ou esquissée intérieurement grâce à ces signes et ces symboles, l'action évoquée prolongeant alors directement (autant que l'action effective dirigée par cette évocation même), l'activité sensori-motrice du niveau précédent ? Selon que l'on adopte l'une ou l'autre de ces deux interprétations, le rôle de l'image est assurément différent, l'imagination remplaçant l'action, dans le premier cas, ou lui servant simplement d'expression symbolique dans le second cas.

Pour ce qui est de l'action elle-même, nous avons constaté sans cesse combien est fondamental son rôle, par opposition à celui de l'image. L'intuition géométrique est essentiellement active : elle consiste avant tout en actions virtuelles, schèmes raccourcis d'actions effectives antérieures ou schèmes anticipateurs d'actions ultérieures, et, lorsque l'action est en défaut, l'intuition tourne court. Dès les rapports élémentaires d'ordre (objets à aligner dans les deux sens), d'enveloppements (nœuds), ou les rapports projectifs (perspectives à reconstituer, ombres à projeter, faisceaux à sectionner, surfaces à rabattre, etc.), affines (losange à étirer), jusqu'aux similitudes et aux ensembles à coordonner en plans, toutes les formes d'intuition spatiale que nous avons étudiées reposent sur des actions : action de placer de proche en proche (voisinage) ou en une succession définie (ordre), d'envelopper, de serrer et de desserrer, de changer de point de vue, de couper, de rabattre, de plier et de déplier, d'agrandir ou de rapetisser, etc.

Or, deux points particulièrement importants sont à noter en ces actions, eu égard au problème de savoir si la représentation spatiale n'est qu'une évocation imagée remplaçant l'action ou est vraiment une action intériorisée. Le premier est que les jeunes sujets ne parviennent pas à imaginer le résultat de telles actions, même des plus simples d'entre elles, avant de les avoir réellement exécutées : un nœud un peu desserré n'est « vu », ni conçu comme homéomorphe à un nœud un peu plus serré, avant que le sujet n'ait tiré sur la ficelle ; la section d'un cylindre n'est pas imaginée sous la forme d'un cercle avant que le couteau posé sur la pâte à modeler ne l'ait réellement sectionnée ; un point de vue perspectif n'est pas reconstitué avant que le sujet n'ait occupé la position correspondante, etc. C'est donc que la représentation ne remplace vraiment l'action qu'après avoir été suffisamment informée par l'action elle-même, et que l'on ne saurait ainsi, sans une coupure artificielle, la détacher de son

contexte actif, pas plus que l'on ne peut dissocier une perception de son contexte sensori-moteur.

Mais ne faut-il pas, en ce cas, dire au contraire que la représentation n'a plus rien à faire avec l'action, puisqu'elle se borne à en lire et à en évoquer après coup le résultat, à la manière dont elle évoquera n'importe quelle donnée physique extérieure au sujet ? C'est ici qu'intervient le second point : les expériences que fait l'enfant, lorsqu'il modifie, par son action, les objets matériels mis à sa disposition, ne sont pas exclusivement des expériences de physique, c'est-à-dire portant sur les caractères intrinsèques de l'objet lui-même, sans quoi on ne comprendrait plus comment le raisonnement géométrique parvient ensuite à se libérer de l'objet pour devenir de plus en plus déductif. La géométrie de l'enfant est bien expérimentale, avant d'être déductive, mais toute expérience n'est pas une expérience de physique. Les expériences initiales qu'engendre l'espace sont, en effet, surtout des expériences faites par le sujet sur les propres actions, et consistant à déterminer comment ces actions s'enchaînent les unes aux autres. Par exemple après avoir placé B entre A et C le sujet découvre qu'il le retrouve nécessairement entre C et A ; après avoir enfilé l'extrémité d'un cordon par la boucle préparée pour faire un nœud, l'enfant découvre qu'en tirant davantage il ne modifie pas le nœud, etc. Bien entendu, la lecture de l'expérience commence par se faire sur l'objet, car la prise de conscience d'une action débute par la constatation de son résultat extérieur, et, en ce sens, ces expériences renseignent le sujet sur les caractères de l'objet et sont bien des expériences de physiques. Mais elles ne sont pas que cela, et il suffit déjà que le fait physique constaté soit un peu complexe (comme par exemple l'horizontalité permanente du niveau de l'eau, chapitre XIII) pour que sa lecture même suppose au préalable une coordination déjà poussée des actions. En plus des connaissances acquises sur l'objet, ce que le sujet apprend dans l'expérience géométrique, c'est donc, nécessairement aussi (et dans une mesure d'autant plus grande que l'expérience est plus poussée), la manière dont ses actions se coordonnent entre elles et se déterminent les unes les autres : par exemple l'action de mettre B entre A et C implique celle de le placer aussi entre C et A, de même que l'enveloppement du cordon dans sa boucle demeure définitif tant que l'action inverse n'a point été exécutée, etc. C'est ainsi que les rapports topologiques, d'abord, puis les relations projectives et euclidiennes, supposent un nombre croissant de coordinations toujours plus

complexes entre les actions elles-mêmes, la détermination d'une droite, d'un angle, de parallèles, de coordonnées, etc., impliquant tout autre chose qu'une constatation simple, mais insérant cette constatation dans un ajustement précis des actions entre elles. On comprend alors en quoi la représentation spatiale est une action intériorisée et non pas simplement l'imagination d'un donné extérieur quelconque, fût-il le résultat d'une action. La représentation spatiale ne parvient, effectivement, à prévoir ce résultat, et même à reconstituer celui d'une action antérieure, qu'en devenant elle-même active, c'est-à-dire en opérant sur les objets symbolisés comme l'action opère sur les objets réels, au lieu de se borner à les évoquer. A cet égard, ordonner en pensée n'est pas seulement imaginer une suite d'objets déjà ordonnés, ni même simplement se représenter en image l'action de les ordonner : c'est ordonner cette suite aussi réellement et activement que s'il s'agissait d'une action matérielle, mais en exécutant intérieurement cette action au moyen d'objets symbolisés. C'est pourquoi, il est plus facile à un jeune enfant de ranger des jetons sur la table ou de sectionner un cylindre d'argile avec un couteau, que d'imaginer l'ordre de ces jetons ou la surface circulaire de la section, tandis qu'il lui est moins difficile de se représenter fictivement qu'il bat un camarade que de le battre réellement : la raison en est précisément que la représentation spatiale est une action intériorisée (comme d'ailleurs toute représentation rationnelle) tandis que la représentation ludique est un substitut de l'action. L'intériorisation des actions spatiales s'effectue d'ailleurs selon des étapes très graduelles, qu'il nous a été possible de suivre pas à pas. A la suite de l'activité sensori-motrice élémentaire, liée à la perception de l'objet, vient l'action évoquée en imagination, mais après seulement qu'elle a été exécutée matériellement : la pensée se forme alors à reproduire l'acte effectif dans sa matérialité et son irréversibilité. Telle est l'intuition élémentaire propre à notre stade I (jusque vers 4 ou 5 ans). Avec le stade II (de 4-5 à 7-8 ans), la coordination croissante des actions extérieures se traduit par une coordination interne de leurs schèmes (c'est-à-dire de leur esquisse intériorisée), mais précédant encore par tâtonnements et ne parvenant qu'à des anticipations fragmentaires des actions ultérieures possibles : on peut alors parler d'une articulation progressive des intuitions. Les opérations concrètes (de 7-8 à 11-12 ans) résultent de cette articulation lorsque les actions intériorisées sous forme de schèmes sont assez coordonnées pour que leur composition, et,

par conséquent, chacune d'entre elles, puisse être déroulée dans les deux sens : c'est cette composition réversible qui caractérise la première forme d'équilibre des actions intériorisées et qui constitue ainsi les premiers systèmes proprement opératoires. Puis, avec le développement de ces coordinations opératoires, plusieurs systèmes peuvent être pensés simultanément, ce qui caractérise les opérations formelles et rend possible leur traduction sous forme de proportions hypothético-déductives (vers 11-12 ans). Ici s'achève l'intuition et débute un type de pensée qui, tout en constituant l'aboutissement de cette intériorisation continue des actions, prépare l'axiomatisation même de l'espace, grâce à ses formalisations discursives croissantes.

Or, à chacune de ces phases de l'intériorisation de l'action correspond une étape particulière de l'image, la connexion fonctionnelle entre l'image signifiante et les rapports signifiés par elle (mais construits par l'action) se transformant de façon continue depuis les débuts de la représentation jusqu'à la période formelle finale.

L'image n'est, en sa source, que le prolongement des accommodations de l'action. Toute action, en s'appliquant à des objets, s'accommode à eux, c'est-à-dire subit en négatif l'empreinte des choses sur lesquelles elle se moule. L'essentiel de l'action n'est naturellement pas dans cette empreinte : il est dans la modification imposée à l'objet, c'est-à-dire l'assimilation de celui-ci aux schèmes du sujet. Mais toute assimilation effective s'accompagne d'une accommodation plus ou moins poussée. Lorsqu'elle se produit sur le plan sensori-moteur, celle-ci consiste en une imitation de l'objet par l'action ; plus précisément l'imitation n'est que le prolongement, en positif, du négatif en quoi consiste l'accommodation. Or, sur le plan représentatif, l'imitation acquiert le pouvoir de fonctionner à l'état différé (c'est d'ailleurs ce passage de l'actuel au différé qui est le point de départ de toute représentation), et l'imitation s'intériorise alors en images, schèmes imitatifs des objets.

On voit ainsi que l'image ne saurait, par elle-même, jouer de rôle actif dans l'acte de la connaissance : elle n'est pas un instrument de l'assimilation comme telle, mais l'expression de l'accommodation qui l'accompagne. Elle ne joue donc qu'un rôle de signifiant, ou de symbole, par rapport à l'acte. Rôle important, d'ailleurs, car c'est dans la mesure où l'action matérielle peut être évoquée par cette imitation intérieure constituée par l'image que cette action devient représentative. Mais si indispensable qu'elle soit à titre de support ou de signifiant,

ce n'est pas l'image qui détermine les significations : c'est l'action assimilatrice elle-même qui construit les rapports, dont l'image n'est que le symbole. Rien n'est donc plus inexact que de réduire l'intuition de l'espace à un système d'images, puisque les réalités intuitionnées sont essentiellement les actions, « signifiées » et non pas remplacées par l'image.

Mais, si tel est le rôle de l'image, il va de soi qu'il variera d'importance selon le degré de structuration des actions virtuelles qu'elle symbolise. Au point de départ de la pensée intuitive, c'est-à-dire lorsque l'intuition spatiale ne repose que sur des actions évoquées, courtes, irréversibles et reproduisant simplement en leur résultat les actions matérielles déjà exécutées auparavant, l'image jouera un rôle d'autant plus apparent que l'action est plus rudimentaire, et la débordé à peine. C'est ce que nous avons appelé ailleurs¹ le niveau de la pensée pré-conceptuelle et imagée : à ce niveau correspond le stade I décrit en cet ouvrage, où l'intuition échoue à reconstituer les transformations les plus simples et se borne à évoquer les résultats des actions déjà exécutées matériellement.

Au niveau des intuitions articulées, les actions évoquées étant plus complexes et surtout commençant à se coordonner entre elles, l'image tend à ne plus remplir qu'un rôle d'adjuvant : symbole encore nécessaire, à titre d'auxiliaire, mais non plus support permanent de la pensée même, elle est déjà en bonne partie débordée par celle-ci.

Au niveau des opérations concrètes, les compositions réversibles qui caractérisent l'action mentalisée deviennent assez cohérentes et assez précises pour que le rôle de l'image cesse d'être indispensable. Avec les opérations formelles, enfin, elle est tellement dépassée par la pensée que l'image du point, de la ligne continue sans surface (cf. chap. V), etc., devient inadéquate à l'intelligence opératoire.

Mais si la fonction de l'image, symbolique dès le début, devient de plus en plus secondaire au fur et à mesure que l'élément actif de la pensée acquiert une structure mieux définie (quitte à ce que le système des signes des langages, commun et surtout mathématique, supplée à son symbolisme), il faut comprendre que ce rôle de l'image demeure, jusqu'au terme final, bien différent dans le cas des opérations spatiales que dans celui des opérations logico-arithmétiques. Un espace est, en effet, un schème unique, englobant en un bloc d'un seul

1. Voir *La formation du symbole chez l'enfant*, chap. VIII.

tenant tous les éléments qui le composent, tandis qu'une classe logique est un ensemble d'éléments discontinus, réunis par leurs seules ressemblances indépendamment de leurs distances dans l'espace et dans le temps. C'est précisément ce caractère de schème unique qui a incité Kant à faire de l'espace une forme de la sensibilité, c'est-à-dire à considérer son caractère intuitif, au sens de sensible, comme fondamental, tandis que ce caractère ne s'oppose en rien à la nature opératoire, c'est-à-dire intellectuelle, de l'espace, mais conduit simplement à distinguer les opérations infralogiques, ou relatives à la construction de l'objet (donc du schème unique), des opérations logico-arithmétiques relatives aux ensembles discontinus d'objets. Mais alors il va de soi que la situation de l'image symbolique diffère dans les deux cas. Dans celui des classes, sériations ou ensembles numériques, l'image intervient certes aussi à titre de symbole auxiliaire de la pensée : on peut ainsi se représenter une classe soit par l'image de l'un de ses individus constituants, soit par un cadre vide et figural (cercles, etc.), et on peut « voir » la suite des nombres sous forme de bâtons alignés, de disques empilés, etc. Mais l'image n'est alors nullement adéquate au schème opératoire, soit qu'elle en figure seulement le squelette sans le contenu, soit qu'elle porte sur l'un des contenus individuels et non pas sur l'ensemble. Au contraire, l'image d'un système spatial est relativement adéquate, puisque ce système constitue un objet unique et que l'image porte sur cet objet comme tel en tant que résultat des opérations. Sans doute demeure-t-elle toujours symbolique et ne remplace-t-elle en rien les opérations actives elles-mêmes. Mais il y a alors adéquation relative entre le symbole et son objet tandis que le symbole imagé d'un produit opératoire logico-arithmétique ne représente qu'une partie très incomplète du système. C'est pourquoi l'image spatiale, malgré ses inexactitudes flagrantes a-t-elle si souvent été considérée comme jouant le rôle essentiel dans l'intuition géométrique et dans le schème de l'espace lui-même, alors que le caractère opératoire et intellectuel de ce dernier est exactement comparable à celui des systèmes de classes, de relations logiques et de nombres, sauf que les opérations dont il s'agit sont infralogiques et non pas logico-arithmétiques.

§ 2. LES OPÉRATIONS INFRALOGIQUES ET LE CONTINU. — Dissipons tout d'abord un malentendu possible. Parvenues au terme de leur évolution, toutes les opérations, qu'elles soient infralogiques, c'est-à-dire spatio-temporelles, ou logico-arithmé-

tiques, c'est-à-dire indépendantes des voisinages, sont susceptibles d'être effectuées abstraitement, c'est-à-dire par voie de déduction formelle, indépendamment de leur application à des objets concrets, et, par conséquent, d'être traduites dans le langage des « propositions ». Au niveau des propositions hypothético-déductives, il n'y a donc plus qu'une logique générale, celle des implications et incompatibilités entre propositions. Cela ne signifie pas que cette logique soit devenue indépendante des opérations ou actions, puisque les propositions énoncent toujours des opérations (ou l'existence de produits d'opérations) et que leurs implications et incompatibilités sont donc encore des opérations, mais au second degré. Mais cela signifie que l'axiomatisation de la géométrie la met exactement sur le même plan que n'importe quelle autre théorie déductive également axiomatisée : la géométrie devient alors un système de propositions équivalant à n'importe quel autre. Mais, avant de pouvoir être traduites en propositions, les opérations spatiales constituent des actions proprement dites, et, à ce niveau concret, elles diffèrent notablement des actions ou opérations portant sur les êtres logiques (classes ou relations entre objets discontinus) et sur les nombres. C'est ce niveau seul, considéré par les mathématiciens comme encore intuitif (par opposition à axiomatique) que nous considérons ici.

De ce point de vue, les opérations constructrices de l'espace sont de caractère infralogique et non pas logique (ce qui n'exclut nullement, il va sans dire, que des êtres spatiaux puissent être soumis par ailleurs à des opérations logiques). L'opération logique porte sur des objets individuels considérés comme invariants et se borne à les réunir ou à les mettre en relation indépendamment de leurs voisinages ou des distances spatio-temporelles qui les séparent. Par exemple $A + A' = B$; $B + B' = C$, etc., ou $A < B < C$, etc. : B est alors une classe reconnaissable quelles que soient les distances entre A et A' et la relation $A < B$ est également indépendante des arrangements spatio-temporels. Au contraire, l'opération infralogique consiste à engendrer l'objet au moyen de ses propres éléments et aboutit ainsi, non pas à des classes ou à des relations indépendantes de l'espace, mais à des objets totaux de divers ordres : il s'agira par exemple de réunir les parties d'un objet en un tout ou de les placer selon un ordre de succession déterminé. Dès lors, au lieu de réunir ou de dissocier les objets selon leurs ressemblances (fondement des classes et des relations symétriques) ou leurs différences (fondement des relations asymétriques), les

opérations infralogiques réuniront ou dissocieront les parties d'objets selon leurs voisinages ou leurs différences de position : ainsi quelques éléments voisins constitueront une réunion α , laquelle jointe à une réunion voisine α' formera la réunion β , etc., chaque réunion d'ordre α , β , γ , δ , etc., constituant un objet partiel et ces totalités de divers degrés étant elles-mêmes parties de l'objet total qui est l'espace considéré.

Dira-t-on que les voisinages et les différences de position sont des relations comme les autres, et que les parties d'objets sont des objets comme les autres, leurs réunions constituant de simples classes et les opérations infralogiques n'étant ainsi qu'un cas particulier des opérations logiques ? Non, parce que réunir des éléments selon leurs voisinages ou selon leurs ressemblances pour en constituer, soit des objets, soit des classes d'objets, implique une opposition fondamentale dans le mode même de réunion : les réunions du premier type forment des systèmes d'un seul tenant, dont la synthèse finale aboutit au continu (une suite de points est dite continue lorsque tout voisinage de l'un quelconque de ces points contient au moins un point de la suite) tandis que celles du second type demeurent discontinues. Il s'ensuit que les opérations infralogiques sont incomposables avec les opérations logiques : si la réunion d'éléments α fait partie de β , si β fait partie de γ , et si l'objet γ appartient à la classe logique A , qui est elle-même incluse dans la classe B , on peut en conclure que γ est un B puisqu'il est un A , mais ni α ni β ne sont des A ni des B . En cet exemple γ est donc, à la fois, le point d'arrivée des opérations infralogiques le reliant à α et à β , et le point de départ des opérations logiques le reliant à A et à B , mais il n'y a pas de composition transitive possible entre ces deux systèmes opératoires¹.

Nous avons vu, en effet, que la notion du continu constitue la synthèse des rapports topologiques élémentaires, qui sont à la racine de la construction de l'espace (chap. V). Mais si élaborée que soit cette notion, et si tardive, génétiquement, que soit son application à la totalité des cadres projectif et euclidien résultant de coordinations opératoires d'ensemble, le continu, considéré en son point de départ perceptif, est précisément le caractère distinctif de l'objet, par opposition à celui des collec-

1. Pour prendre un exemple trivial, si α est un segment faisant partie de la ligne β , et que la ligne β fait partie du carré γ , on peut dire que le carré γ appartient à la classe logique des carrés A et par conséquent à celle des quadrilatères B , mais ni le segment α ni la ligne β n'appartiennent aux classes A et B des carrés et des quadrilatères.

tions discrètes. Il n'est donc pas étonnant que, représenté sous cette forme primitive, dès la source intuitive des opérations infralogiques portant sur l'objet, il se retrouve à leur terme sous une forme précise et générale, qui les distingue des opérations logico-arithmétiques. En effet, à partir du continu perceptif qui caractérise les voisinages les plus élémentaires, la notion du continu évolue en deux directions complémentaires. La première est celle de la décomposition progressive, comme nous l'avons vu au chapitre V, d'abord par partition de l'objet en quelques éléments, en nombre restreint, eux-mêmes continus et isomorphes au tout, puis par décomposition de ces éléments en points visibles en nombre encore fini, et enfin par décomposition indéfinie en points dénués de toute forme. La seconde est celle de la coordination toujours plus étendue : partant de l'objet lui-même, la construction infralogique commence par ne procéder que de proche en proche, en construisant les rapports topologiques intérieurs à chaque configuration. A ce niveau le continu, encore intuitif, ne s'applique pas à l'espace vide, faute d'un espace embrassant tous les objets. Au contraire, avec la coordination des points de vue, caractérisant la construction de l'espace projectif, et avec les mises en relation euclidiennes, qui aboutissent à la construction des systèmes de coordonnées, le continu s'applique à l'espace entier, considéré comme le cadre général de tous les objets ou de tous les observateurs.

Ainsi les opérations infralogiques, dont les compositions sont fondées sur le voisinage, et non pas sur la ressemblance comme les opérations logiques, aboutissent à la construction de schèmes uniques et continus, qui sont les espaces totaux, tandis que les opérations logico-arithmétiques aboutissent à des systèmes d'ensemble discontinus. Il est vrai que le continu intervient à un certain degré d'élaboration de la série des nombres, lorsque aux nombres rationnels sont adjoints les nombres irrationnels, dont la fonction est précisément de combler les lacunes laissées par les premiers. Mais on sait assez que les nombres irrationnels sont nés de la considération de l'espace et que leur introduction est précisément due au besoin de faire correspondre la suite des nombres au continu spatial : ils ne constituent donc pas un produit spontané des opérations logico-arithmétiques, mais bien le point de soudure entre ces opérations et les opérations infralogiques¹.

1. Il est vrai, d'autre part, qu'il existe des « espaces abstraits » pouvant être discontinus et que l'on peut parler de l'« espace des nombres entiers », etc. ; les rapports de voisinage sont alors définis par des correspon-

§ 3. LES OPÉRATIONS INFRALOGIQUES CONSTITUTIVES DES RAPPORTS TOPOLOGIQUES ÉLÉMENTAIRES. — En demeurant exclusivement sur le terrain psychogénétique, c'est-à-dire en nous demandant simplement comment les choses se passent en fait, sans considérations théoriques préalables, nous allons chercher à dégager des analyses contenues en cet ouvrage quelles sont les opérations infralogiques qui interviennent dans la construction de l'espace, et en quoi consiste leur correspondance avec les opérations logico-arithmétiques que nous avons vues à l'œuvre dans la construction du nombre chez l'enfant¹. Nous commencerons, en ce paragraphe, par l'analyse des opérations constitutives des rapports topologiques, puisque les faits nous ont montré combien ces rapports sont primitifs, par opposition aux relations projectives et euclidiennes.

Or, le résultat le plus frappant de notre investigation psychologique est assurément que ces opérations constitutives font appel, pendant fort longtemps, à la seule quantité « intensive ». Il faut dire, par conséquent, et malgré la contradiction apparente, qu'elles sont spatiales sans être encore mathématiques ! Ce n'est qu'une fois constituées et groupées entre elles que les opérations infralogiques de caractère « intensif » engendrent, par leurs combinaisons mêmes, les opérations de caractère « extensif », c'est-à-dire mathématique, soit métriques soit non métriques.

On peut, en effet, répartir les opérations intervenant chez nos sujets (comme d'ailleurs dans la pensée en général) en trois types, c'est-à-dire en deux types fondamentaux, le second étant lui-même distribué en deux sous-types (et cela qu'il s'agisse des opérations infralogiques aussi bien que logico-arithmétiques). Soit deux ensembles A et A' dont la réunion

dances dont la signification s'écarte de plus en plus du sens concret de cette notion. Mais il est à remarquer que ces espaces, pour autant qu'ils conservent un caractère spatial, restent fondés sur une notion de voisinage, qui vient interférer avec les notions logico-arithmétiques dans le même sens que les nombres interfèrent avec les notions spatiales (comme dans le cas des irrationnels). Quant au fait que ces voisinages ne conduisent plus nécessairement à l'élaboration d'un continu, cela s'accorde avec ce que nous disions au début de ce paragraphe que, sur le plan hypothético-déductif et axiomatique, la distinction de l'infralogique et du logique perd sa signification. Enfin pour ce qui est des applications que l'on a pu faire de ces espaces abstraits sur le terrain concret, comme en micro-physique où l'espace est, à certains égards, discontinu, il est à remarquer que l'introduction de telles discontinuités spatiales tient précisément au fait que la notion d'objet cesse d'être valable à cette échelle : nous sommes donc ici à la limite inférieure de l'infralogique et des opérations elles-mêmes.

1. Voir *La genèse du nombre chez l'enfant*, Delachaux & Niestlé.

constitue l'ensemble B . Nous dirons qu'il y a quantification simplement « intensive » quand les opérations se bornent à utiliser les rapports $A < B$ et $A' < B$ sans s'occuper des rapports entre A et A' , autrement dit quand ces opérations nous apprennent simplement que le tout est plus grand que la partie, sans s'occuper de savoir si l'une des parties contient plus ou moins d'éléments que l'autre. Nous dirons au contraire que la quantification devient « extensive » s'il est possible d'établir, en outre, que A contient plus d'éléments que A' , ou moins ou autant. Nous parlerons enfin de quantification « métrique » ou « numérique » au cas où intervient une unité dans cette comparaison entre A et A' , ou entre A (ou A') et B , et par conséquent si l'on peut dire de combien A est supérieur ou inférieur à A' (ou combien de fois A ou A' entrent en B). Nous dirons au contraire que la quantification extensive demeure non métrique s'il n'intervient pas d'unité, et si l'on sait seulement que A est inférieur ou supérieur à A' , sans pouvoir dire de combien.

Il importe ici de bien préciser les questions de vocabulaire. Les mathématiciens ont coutume de répartir les notions spatiales en deux types seulement : les relations métriques et les relations « qualitatives » (la topologie en particulier étant dite qualitative dans la mesure où elle ignore les rapports métriques). On dit, d'autre part, que la logique est « qualitative ». Or, ce n'est pas dans le même sens. La logique des classes et des relations est qualitative dans le sens « intensif » : la théorie du syllogisme, par exemple, ne connaît que les rapports de partie à tout $A < B$ et $A' < B$ et ignore les rapports entre parties, puisqu'elle n'utilise que les quantités « tous », « aucun », « quelques » et « un » (au sens de « quelque »). Au contraire, la topologie est qualitative dans le sens « extensif » : on y dira, par exemple, que l'ensemble A contient « presque tous » les éléments de B , c'est-à-dire « tous à l'exception d'un ensemble faiblement représenté A' ». C'est ainsi que le fameux postulat de Cantor, déterminant le continu par une succession d'intervalles emboîtés, fait appel à une succession de relations « presque tous ». Or, on voit d'emblée que la relation « presque tous » est d'un caractère extensif (puisque $A > A'$), qu'ignore la logique des classes.

Cela dit, il est frappant de constater que les opérations infralogiques permettant à l'enfant de construire sa représentation élémentaire de l'espace sont de caractère simplement intensif, et par conséquent comparable à celles de la pure logique qualitative des classes et des relations définies par leurs seules qualités. Autrement dit, les rapports topologiques que construit

le sujet ne procèdent d'abord que par simples emboîtements ou par construction d'ordres, mais sans parvenir, faute d'analyse du continu, à autre chose qu'à une sorte de logique qualitative de l'espace (donc à une infralogique intensive). Sans doute, bien avant d'être capable de mesure, voit-il qu'une partie d'un ensemble est plus ou moins grande qu'une autre partie (par exemple que sa tranche de gâteau est inférieure à celle de son voisin), mais ces relations extensives demeurent longtemps intuitives et ne donnent pas lieu à des systèmes opératoires définis avant la construction des perspectives et des similitudes (proportions), tandis que les relations intensives donnent lieu à des intuitions plus précoces et à des groupements plus rapides. En particulier, et c'est ce qui nous intéresse pour le moment, la topologie élémentaire de l'enfant est uniquement de caractère intensif, ce qui est d'ailleurs bien naturel puisque seule l'introduction de l'infini dans l'analyse du continu rend la topologie extensive, c'est-à-dire mathématique, tandis que, jusqu'au niveau formel, toutes les opérations spatiales de l'enfant ne portent que sur le fini.

Essayons donc de schématiser ces divers systèmes opératoires que l'enfant d'environ 7 ans se révèle avoir construits au moyen des relations intensives de voisinage, de séparation, d'ordre, d'enveloppement et de continu. Le voisinage comme tel n'est pas construit, mais donné dès les intuitions initiales et servant ainsi de point de départ à la construction opératoire elle-même. Nous exprimerons, dans ce qui suit, deux éléments voisins par les symboles A et A' ou B et B' , etc. Quant à la séparation, deux éléments A et A' sont séparés, quand ils n'ont point eux-mêmes d'éléments communs : $A \times A' = 0$. Mais nous avons vu que l'enfant est capable d'une intuition plus raffinée de la séparation, lorsqu'il la combine avec les notions d'entourage ou d'enveloppement, et de fermeture ou de frontière : témoin ses dessins antérieurs à 4 ans (donc antérieurs aux premiers dessins de triangles, carrés et autres figures euclidiennes), représentant un élément intérieur à une surface fermée, ou extérieure à elle ou à cheval sur la frontière. Nous pouvons traduire cette intuition en disant que l'entourage d'un élément est un ensemble de ses voisinages, eux-mêmes voisins de proche en proche, et que cet élément ou son entourage est enveloppé par une frontière si l'on peut déterminer les situations « intérieure à A », « extérieure à A » ou « sur la frontière (A_0) de A » : un point (ou un élément quelconque d'ordre inférieur à A) sera alors intérieur à A s'il existe un entourage de ce point ne contenant que des points de A ;

un point sera extérieur à A s'il existe un entourage de ce point ne contenant aucun point de A ; un point sera enfin sur la frontière A_0 si tout entourage de ce point contient à la fois des points intérieurs et des points extérieurs à A. En cas d'une frontière séparant A et A', la séparation s'exprimera dès lors par la double disjonction¹ : $(A + A_0) \times A' = 0$ et $(A' + A_0) \times A = 0$. Quant à la notion d'ordre, elle est construite au moyen, soit d'une succession linéaire d'éléments, soit d'une succession d'enveloppements (lignes fermant une surface ou surfaces fermant un volume). Enfin le continu apparaît, au niveau des intuitions représentatives et des opérations concrètes (c'est-à-dire avant que les opérations formelles permettent la compréhension de l'infini et l'introduction d'une quantification extensive fondée sur lui), sous une forme intermédiaire entre le continu perceptif et le continu mathématique. On sait que Poincaré exprimait le continu perceptif dans la formule : $X = Y$ (X est indiscernable de Y) ; $Y = Z$ mais $X \neq Z$, ce qui traduit bien l'irrationnel de la perception. On pourrait dire qu'aux niveaux des intuitions représentatives et des opérations concrètes le continu s'exprime sous la forme non irrationnelle (mais naturellement insuffisante du point de vue mathématique) : X est voisin, mais non séparé (non disjoint) de Y ; Y est voisin, mais non séparé de Z ; mais Z est séparé de X par Y.

Ces diverses notions, une fois fournies par la représentation intuitive, nous constatons que l'enfant parvient aux structures opératoires suivantes, lorsque l'articulation des intuitions en jeu devient suffisante pour assurer leur composition réversible, autrement dit dès le niveau des opérations concrètes :

I. *Partition et addition partitive.* — Les réactions étudiées au chapitre V montrent la capacité dès 6-7 ans de dissocier un continu en éléments voisins (et séparés par cette dissociation même), qui, additionnés de proche en proche, reconstituent le tout. D'où :

$$A + A' = B ; B + B' = C, \text{ etc.}, \text{ et } C - B' = B ; B - A' = A.$$

Ce groupement d'opérations semble être le plus simple de ceux que construit l'enfant. S'il n'apparaît qu'aux environs de 7 ans lorsqu'il s'agit de morceler un continu, c'est à cause du conflit intuitif existant entre une partition en pensée et le

1. Voir KURATOWSKI, *Topologie*, pp. 99 et 101. Les notions mathématiques de fermeture et de frontière impliquent en plus les notions de « point limite » ou de « point d'accumulation » qui sont naturellement extensives.

continu comme tel. Lorsque au contraire le morcelage est déjà donné par le moyen de frontières perceptibles comme dans un quadrillage ou une mosaïque quelconque, l'opération est naturellement plus précoce dans les deux sens direct et inverse.

On constate que ce groupement est l'exact équivalent, dans le domaine infralogique des voisinages, de celui de l'emboîtement des classes A, B, C, etc., dans le domaine logique.

II. *Ordre de placement.* — Le chapitre III nous a montré comment se construit la notion d'un ordre linéaire par la composition des voisinages de proche en proche. D'où les ordres direct et inverse entre éléments A, B, C, etc. : $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow \dots$ et $\dots \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$.

L'ordre inverse, résultant du changement du sens de parcours de la suite, constitue déjà un déplacement, non pas selon la signification euclidienne d'un mouvement des objets eux-mêmes, mais du point de vue des mouvements nécessaires au sujet pour parcourir la suite.

L'ordre sera cyclique si $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow \dots \rightarrow X \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow \dots$, etc., avec également inversion de sens possible.

Le même groupement intervient lorsque sont ordonnés, non plus les éléments d'une suite linéaire, mais les entours ou enveloppements successifs d'un élément de départ ; à cet égard si A est un premier enveloppement (courbe fermée encerclant une surface, ou surface enveloppant un volume), B le second, etc., on retrouve un ordre ABC... qui peut coïncider avec les additions partitives du groupement (I). Mais ce dernier reste indépendant de l'ordre en ce sens que l'on a $A' + A = B$ comme $A + A' = B$.

Il est clair que ce groupement engendrant l'ordre de placement est équivalent aux sériations de relations asymétriques, dans le domaine logique. Sa nature infralogique est cependant attestée, non seulement par l'intervention des voisinages, mais encore par le fait qu'il conduira sur le terrain euclidien aux opérations de déplacement.

III. *Réciprocité des voisinages.* — Sans avoir insisté sur ce point dans cet ouvrage, nous savons, par des recherches anciennes sur le voisinage géographique¹, que la réciprocité inhérente à cette notion n'est pas immédiatement comprise par le jeune enfant. Il est évident, par contre, qu'au niveau des opérations précédentes elle ne constitue plus de difficulté. Si donc, dans

1. Si A est « voisin » de B, B est-il nécessairement « voisin » de A, etc. ?

le groupement I, le sujet part de l'élément A en considérant A' comme l'élément voisin (écrivons-les alors A₁ et A'₁), il peut également partir de A' (que nous écrirons alors A₂) et considérer A comme l'élément voisin (que nous désignerons par A'₂). Il comprendra dès lors que :

$$A_1 + A'_1 = A_2 + A'_2 (= B) ;$$

de même B₁ + B'₁ = B₂ + B'₂ (= C), etc.

Cette réciprocité des voisinages (qui s'applique naturellement aussi aux séparations) constitue l'équivalent infralogique du groupement des « vicariances » sur le plan logique.

IV. *Relations symétriques d'intervalles.* — Or, de même que, sur le terrain des opérations logiques qualitatives, le groupement des vicariances (qui est un groupement de classes) se traduit en termes de relations par le groupement des relations symétriques, de même, sur le terrain infralogique, la réciprocité des séparations se traduit en termes de relations par un système de rapports symétriques, qui sont les rapports d'intervalles. Dans le domaine des notions topologiques élémentaires, qui ignorent les distances et leur conservation, ces intervalles se marquent simplement au sein des groupements d'ordre (II) par le rapport « entre » : par exemple B est entre A et C dans l'ordre direct, de même qu'il est situé entre C et A dans l'ordre inverse. On a donc, en conséquence du groupement II, le groupement suivant (qui s'en extrait à la manière dont un système de relations symétriques peut toujours être extrait d'une sériation) :

$$A \leftrightarrow B (= 0) ; A \leftrightarrow C (= B) ; A \leftrightarrow D (= B, C), \text{ etc.}$$

Nous avons vu, en effet, au chapitre III comment cette relation symétrique « entre » est acquise sitôt construit l'ordre linéaire, tandis qu'elle donne lieu à de multiples difficultés auparavant. D'autre part, nous avons vu comment l'enfant découvre qu'en un ordre cyclique ABCDAB... un élément quelconque (par exemple D) est toujours situé entre deux autres (par exemple entre B et A) dans l'ordre direct et entre les deux mêmes, mais permutés (par exemple entre A et B) dans l'ordre inverse. Ce même groupement s'applique naturellement aussi à une succession ordonnée d'enveloppements (cf. les superpositions de lignes du chap. III ou les nœuds du chap. IV).

V. *Multiplication biunivoque d'éléments.* — Nous avons constaté au chapitre IV (§ 2) comment l'enfant, bien avant de parvenir à la notion euclidienne des dimensions orientées selon

les axes d'un système de coordonnées rectangulaires, découvre topologiquement les dimensions en fonction des rapports d'enveloppement. Un objet enfermé à l'intérieur d'une boîte ne peut être relié à un élément extérieur qu'en traversant l'une des parois, c'est-à-dire une surface ; un élément situé « à l'intérieur » d'une surface fermée ne peut être relié à un élément extérieur qu'en traversant une ligne ; un élément B situé entre A et C sur une ligne ne peut être relié à l'élément D extérieur à AC qu'en traversant le point C : ce sont ces trois sortes d'enveloppements qui fournissent l'image intuitive la plus simple des dimensions, un système à trois dimensions ayant donc pour frontière une surface (un système à deux dimensions), un système à deux dimensions ayant pour frontière une ligne (à une dimension) et un système à une dimension ayant pour frontière un point (à dimension 0). Or, l'élaboration de ces rapports conduit à un groupement multiplicatif sitôt que le sujet passe d'une dimension à plusieurs. Dans le cas de la suite unidimensionnelle ABCD, la ligne qui relie B à D constitue un segment de la ligne ABCD elle-même, puisqu'elle ne coupe que des points appartenant à cette ligne (comme C). Par contre, la ligne qui relie un point intérieur d'une surface fermée à un point extérieur coupe la ligne frontière : si nous représentons cette ligne frontière par la suite A₁B₁C₁D₁..., etc., et la ligne qui la coupe par la suite A₂B₂C₂D₂..., etc., il existe donc un certain point appartenant aux deux lignes à la fois, par exemple le point C₁ coïncidera avec le point D₂ et il faudra l'écrire C₁D₂ ce qui constitue une opération multiplicative s'exprimant par les mots « à la fois » : le point C₁D₂ appartient « à la fois » à la suite A₁B₁C₁, etc., et à la suite A₂B₂C₂, etc. Un groupement multiplicatif à deux dimensions n'est pas autre chose que la généralisation d'une telle opération, dans le cas de l'intersection de deux faisceaux de courbes¹ et l'enfant en a l'image intuitive en n'importe quel réseau pouvant se lire simultanément dans les deux sens comme une table à double entrée.

Dans le cas où l'on envisage les éléments eux-mêmes, emboîtés selon le groupement I, on aura ainsi une multiplication (au sens de la « multiplication logique ») d'éléments lorsque les éléments de deux suites de la même forme que I interféreront selon toutes les combinaisons :

$$A_1 \times A_2 = A_1 A_2 ; B_1 \times B_2 = B_1 B_2, \text{ etc.}$$

La même structure s'étend à 3 ou à n dimensions.

1. Voir L. GODEAUX, *Les géométries*, p. 180.

VI. *Multiplication biunivoque de relations.* — Un même réseau à deux ou à trois dimensions peut se construire en termes de relations. Si nous n'avons pas poursuivi l'étude des groupements multiplicatifs d'éléments, sinon à propos de la genèse des dimensions, nous avons, par contre, rencontré sans cesse les mêmes groupements multiplicatifs dans le domaine des relations, sous la forme des correspondances biunivoques (homéomorphies qualitatives) établies par le sujet entre deux suites ordonnées. En termes concrets une correspondance biunivoque consiste, en effet, précisément à établir un réseau tel que celui dont il vient d'être question : les éléments $A_1B_1C_1...$, etc., d'une suite sont mis en correspondance avec les éléments $A'_1B'_1C'_1$ d'une autre suite lorsqu'une certaine connexion est établie entre A_1 et A'_1 , entre A_2 et A'_2 , etc. En quoi consiste cette connexion ? Elle ne dépasse pas, en général, le simple trajet suivi par les mouvements du regard, mais il va de soi qu'elle pourrait être dessinée sous la forme de lignes reliant les éléments mis en correspondance. En ce cas ces lignes croqueraient les suites $A_1B_1C_1...$ et $A'_1B'_1C'_1$, etc., selon un système multiplicatif à deux dimensions.

VII et VIII. *Multiplications counivoques d'éléments ou de relations.* — Enfin il est évident, sans que nous ayons poussé l'analyse de cette question du point de vue des rapports topologiques (mais, par contre, à propos des angles au chap. XII) que les sujets capables de correspondances biunivoques, c'est-à-dire un terme à un terme, seront également aptes à construire des correspondances un à plusieurs, c'est-à-dire counivoques. Par exemple, dans une mosaïque quelconque, l'élément A_1 correspondra à plusieurs éléments voisins $A_2B_2C_2...$; cette suite $A_2B_2C_2...$ correspondra elle-même à un plus grand nombre d'éléments voisins $A_3B_3C_3D_3F_3...$, etc. Cette extension progressive des voisinages constitue une structure qui préfigure topologiquement les systèmes dont nous retrouverons des exemples projectifs et euclidiens à propos des angles.

Tels sont les systèmes opératoires qui expriment les quelques rapports topologiques dont l'enfant se montre en possession au niveau des opérations concrètes. Mais même en explicitant ainsi, par une formulation symbolique, ce qui demeure implicite dans l'action du sujet, on constate que chacun de ces systèmes se borne à faire appel à des emboîtements, des ordres de succession ou des mises en correspondance entre eux, c'est-à-dire à des notions dont aucune ne suppose encore une quantification

extensive. En effet, les emboîtements des systèmes I et III se bornent à relier les éléments partiels aux totalités dont elles sont intégrantes, les systèmes II et IV ne font pas autre chose, mais en termes de relations et d'intervalles et les correspondances V à VIII ne consistent qu'en emboîtements simultanés selon deux systèmes à la fois. Dès lors ces systèmes ne supposent pas autre chose que des raisonnements qualitatifs, procédant de proche en proche par distinctions dichotomiques : ce ne sont encore que des « groupements » et non pas des « groupes ».

§ 4. LES OPÉRATIONS INFRALOGIQUES CONSTITUTIVES DES RELATIONS PROJECTIVES. — Les rapports topologiques élémentaires se construisent entre parties voisines d'un même objet ou entre un objet et son voisinage immédiat, de façon continue et sans références à des distances¹. Un espace topologique n'est donc qu'une réunion continue d'éléments, déformables par étirements ou contractions, et ne conservant ni droites, ni distances, ni angles, etc. : ces notions topologiques n'aboutissent donc pas à la construction d'un système de figures stables ou de rapports entre les figures, tel qu'un système de coordonnées déterminant les positions relatives et les distances, ou qu'un système de projectivités déterminant les positions et les formes par rapport à un ensemble de plans ou de points de vue. Chaque domaine continu y constitue un espace et aucun espace général n'est encore donné à titre de cadre des objets ou des formes permettant de les situer les uns par rapport aux autres.

On observe donc, dans le développement psychologique de l'espace, un processus analogue à celui que nous avons signalé ailleurs dans l'évolution de la notion de temps. Les intuitions topologiques précédant celles de l'espace projectif et euclidien, et ces deux dernières commençant par être fragmentaires avant d'aboutir à la constitution de cadres d'ensemble, on peut, en effet, établir l'analogie suivante : de même qu'il existe des temps locaux, liés à chaque mouvement, avant qu'un temps homogène et uniforme les réunisse, de même il existe autant d'espaces, chez le jeune enfant, que d'objets ou de configurations distincts, les intervalles vides entre éléments trop séparés n'appartenant pas à l'espace, ou aux mêmes espaces que les continus pleins. A cet égard les opérations projectives jouent

1. Les homéomorphies elles-mêmes qui pourraient apparaître comme des mises en relation à distance exprimant simplement la possibilité de transformer de façon continue l'une des figures correspondantes dans l'autre.

un rôle fondamental dans la coordination générale de l'espace en sa genèse, rôle qu'il s'agit maintenant de rappeler du point de vue des structures opératoires.

Avec les notions projectives, ce sont les formes des figures, leurs positions respectives, et les distances apparentes qui les séparent, mais toutes trois toujours relativement à un point de vue considéré, qui se surajoutent aux rapports topologiques internes. Un dessin en perspective, par exemple, met en place non seulement les éléments des figures les uns par rapport aux autres selon certaines dimensions apparentes, mais ces figures elles-mêmes les unes par rapport aux autres, et toutes ensemble par rapport au point de vue considéré : ce sont ces relations d'ensemble (rejaillissant sur les relations intérieures des figures), dont l'intervention marque le passage du topologique au projectif, le topologique procédant de proche en proche sans système de référence, tandis que le projectif se réfère aux points de vue coordonnés et aux plans sur lesquels les figures sont projetées.

Ce système de références projectives ne conserve pas encore les distances et les dimensions, comme un système de coordonnées, mais les positions relatives des éléments de figure ou des figures les unes par rapport aux autres, le tout en rapport avec un observateur déterminé ou avec un plan comparable à son tableau visuel. C'est l'intervention de l'observateur ou du « point de vue », par rapport auquel les figures sont projetées, qui constitue psychologiquement le facteur essentiel de cette mise en relation. On peut donc caractériser génétiquement la géométrie projective comme une géométrie des points de vue, étant entendu qu'elle suppose la construction préalable des rapports topologiques et qu'elle les conserve en s'y surajoutant.

Les notions projectives élémentaires relèvent par conséquent des mêmes opérations que les rapports topologiques, mais considérées en fonction de l'intervention d'un point de vue. C'est, par exemple, la mise en relation de ce point de vue avec les opérations d'ordre (II) qui engendre la droite projective ou « ponctuelle » : comme nous l'avons vu au chapitre VI (sect. I), la droite est une suite de points ordonnés tels que, du point de vue dit « de bout » ils soient placés les uns derrière les autres et se réduisent ainsi apparemment à un seul point. L'introduction d'un point de vue permet, d'autre part, de préciser la notion des dimensions de l'espace, dans le cas particulier déterminé par ce point de vue. En effet, tandis que topologiquement la première dimension correspond simplement à la notion d'un

ordre linéaire, la seconde aux notions d'intérieur et d'extérieur par rapport à une frontière linéaire fermée, et la troisième aux notions d'intérieur et d'extérieur par rapport à une frontière fermée à deux dimensions (surface), ces mêmes relations prennent, en outre, par rapport à un point de vue perspectif auquel les formes sont rapportées, des significations relatives à l'orientation des droites ou des plans : « à gauche ou à droite », « dessus ou dessous » et « devant ou derrière », marquent ainsi les trois directions d'un espace tridimensionnel. C'est ce qui permet à l'enfant de construire la droite au moyen de ce troisième rapport en excluant les deux autres, ou le plan au moyen de deux d'entre eux en excluant le troisième (voir par exemple au chap. XIII l'abstraction du plan de la surface de l'eau). Mais la droite, une fois construite, en tant que suite de points situés les uns derrière les autres, sans qu'aucune ne soit à gauche ou à droite de l'alignement, ni au-dessus ou au-dessous, est ensuite reconnaissable à de nouveaux points de vue, tels qu'elle soit orientée de gauche à droite ou de bas en haut, etc. Elle est alors reconnue grâce aux deux opérations fondamentales de la géométrie projective, qui sont les projections et les sections, la droite intervenant d'ailleurs à titre d'instrument nécessaire dans les projections elles-mêmes. Projeter une figure consiste à la transformer en une seconde obtenue sur un plan par l'intermédiaire d'un ensemble de droites reliant les points de la première aux points correspondants de la seconde et orientées à partir d'un point commun extérieur à ces figures. Dans les opérations qui conduisent génétiquement à la construction de l'espace projectif, c'est naturellement la projection des objets sur le « tableau visuel » (plan fronto-parallèle situé entre l'œil de l'observateur et l'objet observé) qui joue le rôle essentiel, et c'est par rapport aux opérations qu'il apprend ainsi à construire, que le sujet comprendra les projections indépendantes de lui telles que des ombres (chap. VII). C'est pourquoi nous nous placerons ici essentiellement au point de vue des projections intervenant dans la perspective (la perspective étant géométriquement une projectivité des « formes de première espèce »). Les problèmes principaux de la géométrie projective spontanée sont ainsi de coordonner les divers points de vue successifs (ou simultanés, en cas d'observateurs différents), par la construction des projections et des sections élémentaires intervenant dans la mise en relation du tableau visuel et des objets, ainsi que des divers écrans sectionnant ces projections.

C'est en de telles mises en relation que la droite occupe une

position privilégiée, non seulement en tant qu'instrument de la construction des projections, mais encore (et par cela même) en tant qu'unique forme se conservant lors des changements de points de vue (seule sa longueur se modifiant, avec pour limite le point). A cet égard, les huit groupements d'opérations que nous avons distingués à propos des rapports topologiques élémentaires se retrouvent dans la construction spontanée des relations projectives, mais transformées par l'adjonction des rapports nouveaux dus à l'intervention d'un point de vue. Mais, comme nous l'avons remarqué à propos des opérations précédentes, cette construction spontanée commence par n'être pas proprement mathématique et par n'utiliser que des opérations infralogiques de caractère intensif, c'est-à-dire équivalentes à celles de la seule logique qualitative. Aussi va-t-il de soi que ces opérations ne suffisent nullement à rendre compte des rapports si précis d'ordre extensif qui interviennent en géométrie projective (par exemple la conservation des quaterns harmoniques, etc.). C'est à une quantification ultérieure des rapports intensifs initiaux qu'incombe la tâche de mathématiser cette construction projective de base. Il n'en reste pas moins intéressant d'essayer de dégager cette substructure infralogique des projectivités, puisqu'elle correspond, à n'en pas douter, à une élaboration autonome, comme en témoigne l'apparition de la perspective à un stade déterminé du développement du dessin, ainsi qu'on l'a observé si souvent.

I. *Addition et soustraction des éléments projetés.* — L'addition des parties voisines ($A + A' = B$; $B + B' = C$) que nous avons décrite au paragraphe 3 comme la plus simple des opérations spatiales, aboutit uniquement, sur le terrain des rapports topologiques élémentaires à cette notion (qui n'est d'ailleurs pas à négliger lorsqu'on la compare aux difficultés de l'intuition prélogique) que les divers éléments d'un tout se conservent quelles que soient les déformations apparentes de ce tout. C'est ainsi qu'un objet topologique peut s'étirer ou se contracter de façon quelconque (comme l'élastique dont nous nous sommes servis au chap. V), sans que ces éléments se détruisent, ni ne cessent de correspondre bi-univoquement à ses structures homéomorphes. Mais les rapports topologiques ne déterminent pas ces étirements ou contractions eux-mêmes et se bornent à analyser les invariants qui subsistent au travers de telles modifications, considérées comme arbitraires, faute de systèmes de référence en dehors des configurations envisagées.

Au contraire, une figure projective se transforme en fonction des changements de points de vue, et l'introduction de cette considération, qui implique une coordination d'ensemble, nécessite des compositions qui expriment à la fois la conservation des totalités et les transformations au travers desquelles elles se conservent.

Dans le cas des opérations de réunion des parties voisines d'un objet ($A + A' = B$; $B + B' = C$, etc.) la signification projective de l'opération inverse ($B - A' = A$), etc., est ainsi la suppression d'un élément, cessant d'être visible par le fait qu'il est masqué par un autre objet faisant écran. Cette soustraction exprime donc une section, tandis que la réunion selon les voisinages, ou opération directe, aboutit à la conservation de l'ensemble des éléments visibles (ou projetés sur un même plan) de l'objet considéré selon un point de vue.

Lorsque, par contre, c'est une partie d'un même objet qui en cache une autre (d'où le rapport réciproque en cas d'inversion de point de vue) ou que, dans une configuration d'ensemble, considérée comme un seul tout, un élément en sectionne un autre (et réciproquement dans le point de vue inverse), il y a soustractions et additions non plus simples comme celles du présent type, mais vicariantes, ce qui conduit au groupement III. Ce groupement I exprime donc uniquement la possibilité, pour l'enfant, de construire une représentation graphique de l'objet en perspective en tenant compte à la fois des réunions d'éléments visibles et des suppressions par sections dues à l'interférence d'objets écrans.

II. *L'ordre rectiligne.* — L'ordre de succession linéaire $A \rightarrow B \rightarrow C$, etc., fourni par les constructions topologiques initiales est transformé en ordre rectiligne, grâce à l'intervention d'un point de vue, lorsque des points ordonnés se projettent tous de proche en proche sur le seul point initial, au cas où l'alignement est vu « de bout ». Cette opération fondamentale, issue de la conduite de la « visée » (voir chap. VI, sect. I), est corrélative de la précédente : elle en résulte même en un sens, puisque c'est la réduction de la longueur totale à un seul point, masquant les autres, qui permet de reconnaître la droite, mais elle la conditionne en retour, puisque ce sont les faisceaux et les gerbes de droites qui permettent de mettre en relation les figures entre elles ainsi qu'avec l'observateur, en tout ensemble perspectif. Il en résulte que la droite est la seule forme invariante au sein des transformations projectives, tandis que les parallèles, les

angles et les courbes sont tous modifiés par les changements de point de vue.

III. *La réciprocité des perspectives.* — Nous avons vu (§3) comment l'opération ($A_1 + A'_1 = A_2 + A'_2$, etc.) exprime initialement la réciprocité des voisinages et des séparations. Liée à la considération des points de vue, cette même opération acquiert une nouvelle signification, dont nous avons constaté (chap. VIII) l'importance essentielle : c'est la réciprocité (ce terme étant pris ici en son sens logique courant et non pas dans le sens technique et quantifié qu'il a pris en géométrie projective) des perspectives, et par conséquent des points de vue qui les conditionnent. Soit un alignement $A_1 + A'_1$ vu de gauche à droite d'un certain point de vue : pour l'observateur situé en face du premier (l'alignement en question se trouvant entre les deux), la même suite vue de gauche à droite se lira $A_2 + A'_2$, l'élément A_2 étant identique à A'_1 et l'élément A'_2 identique à A_1 , d'où $A_1 + A'_1 = A_2 + A'_2$, etc. ; il en va de même en ce qui concerne l'ordre devant × derrière, etc. Si une seule composition du type I exprime la conservation des éléments voisins, donc de leur position, relativement à un point de vue, cette composition du type III exprime la conservation des positions relatives, en cas d'inversion des points de vue.

Nous avons constaté qu'il existe un léger décalage entre l'apparition des opérations I et II (chap. VI et VII) et celle de ces opérations III (chap. VIII), les premières étant groupées dans les cas simples dès le niveau III A, la troisième n'aboutissant à la coordination générale des perspectives qu'au niveau III B.

IV. *Les relations symétriques d'intervalles.* — Traduite en termes de relations la structure du groupement d'éléments de type III aboutit aux relations symétriques, non pas seulement au sens logique de cette expression, mais au sens de symétries proprement spatiales par rapport aux éléments médians conservant leur position invariante. Par exemple la composition $A_1 + A'_1 + B'_1 = A_2 + A'_2 + B'_2$ signifie le remplacement, lors d'une inversion des points de vue, de l'élément de gauche A_1 , par l'élément de droite B'_1 (devenu A_2), le remplacement de l'élément de droite B'_1 par l'élément de gauche A_1 (devenu B'_2), mais le maintien de l'élément médian compris dans l'intervalle $A_1 \leftrightarrow B'_1$ (ou $A_2 \leftrightarrow B'_2$) et qui reste $A'_1 = A'_2$. C'est par rapport à ce médian inchangé que les deux couples $A_1 + B'_1$ et $A_2 + B'_2$ sont symétriques.

De cette composition de type III on peut donc tirer la composition IV dont l'essentiel se ramène à $X \leftrightarrow Y = Y \leftrightarrow X$, c'est-à-dire que les termes situés dans l'intervalle compris entre X et Y demeurent dans cet intervalle si l'on inverse les points de vue. C'est ce que saisit l'enfant dès qu'il est capable de dominer les réciprocités (chap. VIII).

V. *La multiplication bi-univoque des éléments.* — Si ce groupement multiplicatif aboutit, sur le terrain des rapports topologiques à la construction des dimensions fondée sur la notion d'enveloppement (voir § 3), le même système opératoire, lorsque l'on introduit la considération des points de vue, engendre les dimensions projectives. En effet, par rapport à un point de vue donné, il n'existera plus seulement des relations limitées à une configuration restreinte, telles que « à l'intérieur » ou « à l'extérieur », etc., mais des relations d'ensemble entre les figures elles-mêmes, telles que « gauche × droite », « dessus × dessous » et « devant × derrière ». Ce sont ces rapports d'ensembles, relatifs aux points de vue considérés, qui, joints aux opérations multiplicatives du type V, engendrent le plan et les faisceaux de plans, par opposition aux surfaces quelconques ou aux espaces quelconques à trois dimensions. Un plan n'est d'abord, à cet égard, qu'un réseau de droites dont les intersections (c'est-à-dire précisément le produit de la multiplication de leurs points au sens logique ou infralogique de cette opération, et non pas arithmétique) ne s'effectuent que selon deux des trois rapports précédents : le plan, vu d'un point de vue déterminé se réduit ainsi à une droite, comme la droite, vue « de bout » se réduit à un point, par le fait que toutes les droites constituant ce plan sont orientées selon les sens « gauche × droite » ou « avant × arrière » et aucune selon le sens « dessus × dessous ». De même la multiplication des plans engendre un faisceau de plans, ou espace projectif à trois dimensions, etc.

VI. *La multiplication bi-univoque des relations.* — Les tables à double ou à triple entrées constituées par les opérations précédentes, et engendrant les dimensions de l'espace projectif, se traduisent, en termes de relations asymétriques, par un système analogue d'opérations, qui joue un rôle fondamental dans le dessin en perspective et se traduit par la mise en relation des plans en profondeur avec les dimensions en largeur et en hauteur du premier plan.

Prenons comme exemple le dessin d'un paysage vu en perspective (comme le village vu à 45° du chap. XIV ou le dessin

vu de face de la maquette rectangulaire des trois montagnes du chap. VIII). Le premier plan débute par une grande droite s'étendant entre la gauche et la droite, tandis que l'arrière-plan se termine par une autre droite, parallèle (la ligne d'horizon dans la réalité). Entre deux, les objets peuvent être ordonnés d'avant en arrière selon des droites non parallèles entre elles, mais constituant des segments de fuyantes et dont les longueurs en perspective sont plus courtes que les longueurs réelles. Ils sont enfin ordonnés de bas en haut selon des niveaux d'altitude euclidiennement horizontaux mais dépendant aussi, projectivement, de la profondeur. Tous les objets peuvent ainsi être mis en relation selon les trois rapports à la fois gauche $\times$ droite, avant $\times$ arrière et dessus $\times$ dessous, c'est-à-dire selon une table à triple entrée et qui est l'équivalent projectif d'un système de coordonnées, mais transformé par les perspectives.

C'est en particulier ce groupement multiplicatif des relations selon les trois dimensions (d'où trois sortes de correspondances bi-univoques entre les objets) qui permet à l'enfant une fois comprise la dévaluation projective des longueurs en profondeur, de dessiner une tige rectiligne qui, vue de biais (comme au chap. VI, sect. II), se raccourcit de plus en plus. Si nous appelons A_1 , A'_1 et B'_1 des parties quelconques de cette tige vue de face, reconnaissables à des points de repère (d'où $A_1 + A'_1 = B_1$ et $B_1 + B'_1 = C_1$, c'est-à-dire la longueur totale de la tige), le sujet parviendra, en insérant cette même tige vue obliquement dans le réseau dont il vient d'être question, à comprendre que ces parties correspondront alors à des longueurs réduites A_2 , A'_2 et B'_2 telles que $A_2 < A_1$; $A'_2 < A'_1$; $B'_2 < B'_1$ d'où $B_2 < B_1$ et $C_2 < C_1$. De même, si la tige est encore plus oblique, ses éléments A_3 , A'_3 et B'_3 donneront $A_3 < A_2$; $A'_3 < A'_2$ et $B'_3 < B'_2$. Indépendamment de toute quantification extensive (qui fournirait une gradation continue de cette transformation) et *a fortiori* de toute mesure, le sujet parvient donc grâce à cette double relation « plus loin » $\times$ « plus court » à une mise en correspondance des perspectives successives de la tige en rotation. Il y a là, sous la forme simplement intensive d'une multiplication de relations, le point de départ infralogique des correspondances projectives bi-univoques ou « homologies ».

VII et VIII. *Multiplications co-univoques d'éléments et de relations.* — Le système précédent d'opérations constitue un système quadrangulaire, c'est-à-dire qu'il implique un double

ou triple jeu de correspondances bi-univoques, selon les deux ou trois dimensions envisagées. Au contraire, les correspondances co-univoques expriment les structures triangulaires, dont la plus simple est fournie par deux fuyantes se rejoignant à l'horizon, telles que les rails ou les barrières dessinées par l'enfant au chapitre VI (sect. II). De tels systèmes sont également à deux dimensions, donc multiplicatifs, puisque l'on a, selon l'une, les travées reliant les rails ou les barreaux de la barrière, et, selon l'autre, les rails eux-mêmes, ou les lignes du sol et du sommet de la barrière. Mais la correspondance au lieu d'être terme à terme est d'ordre un à plusieurs dans la mesure où l'on envisage, cette fois, chaque accroissement de longueur comme l'adjonction d'un élément nouveau au point unique O, les rails se rejoignent, à l'horizon correspond la plus petite travée visible (A); à celle-ci correspond une travée plus grande B, et ainsi de suite jusqu'à la plus longue T, qui est la plus proche. Cette correspondance co-univoque peut se traduire en langage d'éléments (VII) ou de relations (VIII).

Or, l'agrandissement progressif des travées ou des barreaux, du point d'horizon jusqu'au point le plus proche peut donner lieu à une quantification extensive, qui est même sans doute la plus simple de celles que connaisse l'enfant : c'est celle qui aboutit à concevoir cet agrandissement comme uniforme et continu. Mais l'intérêt des réactions observées au chapitre VI a été au contraire de nous montrer qu'entre le stade où le sujet ne marque pas la perspective (et laisse constante les longueurs des travées) et le stade où il recherche cette transformation uniforme et continue, il existe un niveau où il se contente d'une quantification intensive : les travées décroissent irrégulièrement en s'éloignant dans la direction de l'horizon. Autrement dit si, entre le point d'horizon O et la longueur de la plus grande travée T, on distingue les longueurs O, A, B, C, etc., et leurs différences A (entre O et A), A' (entre A et B), B' (entre B et C), etc., au lieu d'avoir $A = A' = B' = C' \dots$ etc., ou même $A < A' < B' < C'$ etc., ce qui exprimerait la quantification extensive du système, on a simplement $O < A < B < C$, etc., sans quantification des différences elles-mêmes (A, A', B', etc.). Ce petit fait illustre, de la manière la plus claire, combien les opérations infralogiques précédentes demeurent comparables aux simples emboîtements de la logique qualitative (ne connaissant que le rapport $A < B$ si $A + A' = B$), par opposition aux rapports mathématiques, qui débutent avec la mise en relation des différences (c'est-à-dire des parties entre elles). Mais le sys-

tème des correspondances co-univoques, dont on vient de voir le schème infralogique, est précisément celui qui conduit l'enfant le plus près de cette quantification extensive ou de cette mathématisation des perspectives. Jointes aux correspondances bi-univoques, qui permettent de retrouver les parties équivalentes entre les perspectives diverses d'un même objet, ces correspondances co-univoques qui expriment, sous une forme pré-mathématique, les transformations de dimensions de cet objet avec l'éloignement constituent donc également l'une des substructures qualitatives des futures « homologues ».

§ 5. LES OPÉRATIONS INFRALOGIQUES CONSTITUTIVES DE L'ESPACE EUCLIDIEN. — Entre les rapports projectifs et les rapports métriques, engendrés par le déplacement combiné avec la partition, viennent s'intercaler certaines relations dont nous avons pu constater que les enfants les dominent à peu près en même temps que les précédentes.

Dans les rapports projectifs, ni les parallèles, ni les angles, ni les distances ne se conservent encore. Les rapports d'affinité conservent au contraire les parallèles tout en faisant varier les angles et les distances. Nous en avons vu un exemple, au chapitre XI, avec la transformation des losanges et avons constaté qu'une fois acquise la droite projective, par conservation de la direction du regard dans la conduite de la « visée », la notion des parallèles (même en présentation oblique comme c'est le cas des losanges, par opposition aux verticales) ne présente plus de difficulté. Il y a là un fait qui semble au premier abord curieux, puisque deux parallèles apparaissent en perspective comme des fuyantes. Mais, d'une part, l'opération de la visée suggère la notion de la conservation d'une direction en général, qui peut s'appliquer à deux éléments comme à un seul. D'autre part, la compréhension des perspectives entraîne la coordination des points de vue distincts, et, même si cette coordination apparaît un peu plus tard (niveau III B) sous sa forme d'ensemble, il est facile de comprendre dans le cas des fuyantes que le point de vue inverse renversera les rapports et qu'ainsi à deux droites qui se rapprochent en s'éloignant quel que soit le point de vue, correspondent, indépendamment de la perspective, deux parallèles effectives. Ici encore, on peut donc concevoir la construction de cette notion comme antérieure à toute quantification extensive ou métrique.

Dans les similitudes, d'autre part, la figure conserve sa forme (droites ou courbes, parallèles et angles), mais change de

grandeur selon des rapports de proportionnalité. Or, nous avons vu au chapitre XII qu'antérieurement à toute compréhension métrique ou même extensive des proportions, l'enfant découvre la similitude des triangles emboîtés grâce au parallélisme de leurs côtés et par cela même devient capable de l'établir par superposition grâce à l'égalité de leurs angles. Mais, dans ces deux cas, il ne s'agit que de jugements en égal, en plus ou en moins : ou bien il y a égalité (en cas de parallélisme ou d'identité des inclinaisons jugées par superposition), ou bien il y a inégalité plus ou moins grande, mais dans tous ces cas l'évaluation demeure longtemps sans mesures proprement dites ni mise en proportions. Comme pour les angles variables intervenant dans les perspectives, l'enfant juge donc des angles des triangles semblables selon un système de correspondances co-univoques (voir § 4, opér. VII et VIII) et, si ce groupement le conduit tôt ou tard à la notion des proportions, nous avons constaté au cours de tout le chapitre XII combien il reste qualitatif (au sens d'intensif) en son point de départ.

Quant aux rapports constitués par les déplacements et la métrique euclidienne, ils conservent les distances en plus des droites, des parallèles et des angles. Si nous connaissons par ailleurs la notion que l'enfant se donne du déplacement¹, nous n'avons pu étudier, dans cet ouvrage, ni le problème de la distance ni la grande question de la mesure, qui nécessiteront une nouvelle publication. Cependant l'analyse des systèmes spontanés de coordonnées (chap. XIII et XIV), jointe à ce que nous savons déjà de la notion de mouvement, nous autorise à compléter le tableau des opérations spatiales de caractère intensif qui préparent, sur ce terrain aussi, la quantification mathématique (dans le cas particulier métrique). Or, on pourrait se demander *a priori* comment le sujet peut parvenir à la conservation des distances ou des grandeurs si ce n'est au moyen d'opérations métriques, puisque la notion de distance paraît dénuée de signification en dehors de sa mesure même. Il semble donc qu'ici nous devions quitter dès l'abord le terrain des opérations qualitatives intensives. Mais si l'on prend la peine d'étudier les choses psychologiquement, on s'aperçoit qu'il existe dans la construction de la mesure spatiale, un cercle presque aussi grave que dans celle de la mesure du temps (et ici le psychologue rencontre, comme bien souvent, les préoccupations du physicien plus que

1. Voir *Les notions de mouvement et de vitesse chez l'enfant*, Paris, P.U.F., 1946, chap. I à V.

du mathématicien) : la mesure suppose en effet, la conservation des grandeurs au cours des déplacements, car un mètre qui varierait arbitrairement de longueur, lors des mouvements qu'on lui imprime pour l'appliquer sur l'objet à mesurer, serait d'un très faible secours. Or, précisément (si l'on nous permet cette anticipation sur un second ouvrage) les petits ne croient pas à la conservation des longueurs, pas plus qu'à celle des intervalles vides ou distances ! Il faut donc bien admettre que c'est d'abord la composition qualitative (et intensive) banale des parties en un tout ($A + A' = B$, etc.), qui assure la conservation de ce tout avant qu'aucune métrique ne soit possible et c'est ce que nous avons vu jadis en étudiant avec B. Inhelder la conservation des quantités¹. Seulement, dans le cas de l'espace, cette opération intervient déjà dans la composition d'une totalité topologique (par exemple des éléments d'un corps élastique ou d'un nœud, voir chap. IV et V) et, si elle assure la conservation de ce tout à titre de somme de ses parties, cela n'entraîne nullement l'invariance de ses grandeurs (longueurs, etc.). Comment donc passer de la conservation d'un ensemble d'éléments voisins et non séparés (cf. § 3) à celle des distances ou longueurs ?

C'est ainsi qu'apparaît l'originalité de l'espace euclidien par rapport à l'espace topologique et à l'espace projectif, ainsi que sa solidarité avec ce dernier. En effet, contrairement à l'espace topologique, qui ne connaît pas de références en dehors de la configuration déformante envisagée ni, par conséquent, de conservation des distances ou des grandeurs, cette dernière conservation apparaît avec la construction d'un système de références général et fixe, dont les distances sont les parties intégrantes ; et contrairement à la coordination d'ensemble des points de vue projectifs, qui laisse varier la grandeur apparente des objets (en ne considérant que leurs relations avec le point de vue du sujet ou le plan de projection), l'espace euclidien suppose une coordination des emplacements eux-mêmes, par rapport auxquels les objets se déplacent, et c'est cette mise en relation du mobile et de ses emplacements successifs qui permet de lui conférer une grandeur constante en même temps que les distances parcourues sont ainsi rendues fixes. La conservation des distances et des longueurs n'est donc pas autre chose que le prélude à la construction d'un système total de coordonnées.

Mais si l'espace euclidien se distingue ainsi de l'espace pro-

1. PIAGET et INHELDER, *Le développement des quantités chez l'enfant*, Delachaux & Niestlé.

jectif, nous avons constaté sans cesse combien les deux constructions d'ensemble que ces espaces représentent sont nécessairement solidaires. Tandis qu'axiomatiquement on peut fonder directement la métrique euclidienne (cas particulier de la métrique générale) sur la topologie, aussi bien que l'espace projectif, et que les axiomes nécessaires à la construction d'un système de coordonnées sont équivalents à ceux qui engendrent les projectivités, psychologiquement c'est dans la mesure où le sujet parvient à coordonner les points de vue, donc à construire les rapports projectifs, qu'il parvient par ailleurs à coordonner les distances, donc à construire les rapports euclidiens. Ces deux systèmes s'appuient ainsi l'un sur l'autre : tous deux aboutissent, en effet, à une mise en relation des figures entre elles et non pas seulement des parties voisines des figures, d'où une conservation, soit de certains rapports de forme invariants au cours des changements de points de vue, soit des distances ou grandeurs, invariantes au cours des mouvements. De même que perceptivement la constance des formes corrélative avec celle des grandeurs, car on voit simultanément en perspective et selon les grandeurs réelles, de même les opérations qui relient les points de vue sont solidaires de celles qui assurent la conservation des grandeurs du point de vue de l'objet lui-même, c'est-à-dire d'un observateur adhérent à lui ou qui le parcourt. Relier par des droites le tableau visuel à l'objet lointain implique, en effet, la possibilité de déplacer cet objet et de le ramener à soi le long de ces droites, ainsi que d'aller à lui selon le même trajet, c'est-à-dire dans les deux cas de l'agrandir en le rapprochant jusqu'à lui restituer sa grandeur constante. C'est pourquoi la construction d'un système projectif d'ensemble conduit, à titre de construction réciproque, à la coordination des mouvements (ou déplacements des objets et non plus seulement de l'observateur) et par conséquent des emplacements par rapport auxquels il y a conservation des grandeurs.

Cela étant, les opérations infralogiques constitutives d'un système de coordonnées sont parallèles aux précédentes, mais au lieu de porter sur l'objet relatif à un point de vue et sur les changements de points de vue, elles expriment les caractères de l'objet relativement à son emplacement ainsi que ses déplacements :

I. *Addition et soustraction d'éléments.* — Soit un objet (à une ou plusieurs dimensions) occupant un emplacement par rapport à d'autres objets : il détermine ainsi une figure pouvant être

interprétée indifféremment comme la forme de cet objet ou comme celle de son emplacement, c'est-à-dire comme une « figure de l'espace » ou partie délimitée du système des emplacements. Ces emplacements ne sont donc rien d'autres que certains rapports entre objets, dont il sera question à partir des opérations II mais, les opérations de ce type I portant psychologiquement sur la figure de l'objet avant de concerner celle de son emplacement, il est inutile de renverser l'ordre des opérations. Les opérations I consistent donc simplement à réunir ou à dissocier les parties de la figure considérée : $A + A' = B$; $B + B' = C$, etc., ce qui assure la conservation du tout aussi bien à titre d'emplacement que de figure de l'objet placé.

II. *Placements et déplacements.* — Considérons maintenant plusieurs objets séparés et ordonnons-les, soit selon un ordre linéaire quelconque (opér. II du § 3), soit le long d'une droite (opér. II du § 4). On aura donc $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow$ etc. Ces objets seront ainsi dits « placés » les uns par rapport aux autres. Mais, dans le système des opérations constitutives de l'espace euclidien, l'opération inverse n'est plus simplement le parcours en sens contraire de la suite $\rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$: elle est le changement d'ordre ou de placement, c'est-à-dire le « déplacement », lequel peut inverser la suite entière ou simplement un élément par rapport à un ou quelques autres, par exemple $A \rightarrow C \rightarrow B$ par inversion de $B \rightarrow C$. Ce déplacement introduit alors, comme nous l'avons constaté en détail ailleurs¹, une distinction entre l'ordre des éléments et celui des emplacements, ainsi qu'entre deux sortes d'opérations corrélatives et de même forme, selon que l'ordre est appliqué aux objets mobiles et à leurs déplacements possibles ou aux emplacements immobiles pouvant être parcourus par ces mouvements. La notion de déplacement se réduit à ces seules notions qualitatives (ou intensives) avant d'être intégrée dans le « groupe » métrique à six paramètres connu sous le nom de « groupe des déplacements ».

III. *Réciprocité des références.* — Supposons maintenant plusieurs figures voisines (constituées par les formes des objets ou de leurs emplacements) additionnées selon le type I en partant de A_1 comme référence. On aura par exemple $A_1 + A'_1 = B_1$ et $B_1 + B'_1 = C$. Il sera alors toujours possible d'aboutir à

1. *Les notions de mouvement et de vitesse chez l'enfant*, Paris, P.U.F. 1946, chap. III-IV et Conclusions.

la même réunion C en partant de A'_1 ou de B'_1 comme référence, et en l'appelant A_2 , d'où $A_2 + A'_2 + B'_2 = C$. Jointe aux groupements d'ordre à plusieurs dimensions (VI) cette opération III conduit à la réciprocité des systèmes de coordonnées, l'élément A_1 ou A_2 étant considéré comme l'« origine » de chacun des systèmes envisagés.

IV. *Emboîtements des intervalles ou distances.* — L'intervalle entre deux points ordonnés le long d'une droite est une distance. La conservation des distances est assurée par le fait que ces points et cette droite font partie des « emplacements » immobiles tout en pouvant être parcourus par un objet en mouvement. La relation constituée par le déplacement de ce dernier entre X et Y étant une relation asymétrique, la distance constitue la relation symétrique d'intervalle correspondante : symétrique parce que de X à Y il y a la même distance que de Y à X soit $-X \leftrightarrow Y = Y \leftrightarrow X$.

V. *Multiplication bi-univoque des éléments.* — Une suite linéaire d'éléments $A_1 + A'_1 = B_1$; $B_1 + B'_1 = C_1$, etc., multipliée par une autre $A_2 + A'_2 + B'_2$ etc., constitue une surface ; et les deux multipliées par une troisième $A_3 + A'_3 + B'_3$ + etc. engendrent un volume.

VI. *Multiplication bi-univoque des relations de placement et de déplacement.* — Quant aux mêmes opérations traduites en termes de relations asymétriques (ordre de placement et déplacement), elles engendrent précisément un système de coordonnées. Un tel système n'est pas autre chose, en effet, qu'un réseau d'emplacements ordonnés en fonction de points de référence ou objets considérés comme immobiles, ces emplacements étant ordonnés selon deux ou trois dimensions simultanément : tandis que l'une des suites ordonnées constitue l'un des axes du système, la seconde étant ordonnée selon une autre dimension, constitue un deuxième axe. Quant aux intervalles entre les emplacements ordonnés, ils consistent en distances invariantes, en relation avec l'opération IV. Un tel système de coordonnées n'est pas nécessairement métrique, ainsi que nous l'avons vu aux chapitres XIII et XIV. Pour comprendre la chose, il suffit de dégager la structure de ce groupement de relations VI plus explicitement que nous ne l'avons fait aux paragraphes 3 et 4. Soit un ensemble d'emplacements punctiformes ordonnés selon deux dimensions à partir de 0 (et représentés sur le tableau par de gros points reliés entre

et des relations asymétriques (II) ; on peut aussi les additionner en divers sens possibles, d'où la réciprocité des systèmes de classes ou d'éléments (III) et la construction des relations symétriques (IV). On peut enfin les multiplier, c'est-à-dire réunir deux ou plusieurs suites additives en tableaux à double ou plusieurs entrées, soit par correspondance bi-univoque des classes et éléments (V) ou des relations (VI), soit par correspondance co-univoque des classes et éléments (VII) ou des relations (VIII). Cette dernière distinction des correspondances bi-univoques et co-univoques résultant elle-même de l'opposition des asymétries et des symétries, on a donc les combinaisons suivantes : 2 (éléments ou relations) $\times$ 2 (asymétries ou symétries) $\times$ 2 (additions ou multiplications) = 8.

§ 6. LES OPÉRATIONS EXTENSIVES ET MÉTRIQUES ET LE PROBLÈME DE LA SUCCESSION GÉNÉTIQUE DES OPÉRATIONS. — L'ensemble des opérations qui précèdent (§ 3 à 5) fournissent le cadre qualitatif ou intensif de la construction infralogique de l'espace, cadre préalable nécessaire à sa mathématisation mais non encore mathématique lui-même.

Nous avons observé sur au moins deux terrains le passage des rapports intensifs à une quantification extensive systématique : dans le cas de la réduction régulière des dimensions d'un objet en fonction de l'éloignement (chap. VI, sect. II) et dans celui des proportions (chap. XII). Le premier de ces deux passages, qui est le plus simple, se produit presque aussitôt après que le sujet ait compris la décroissance de la grandeur apparente. L'enfant commence par une simple sériation qualitative, les travées situées entre les rails ou les barreaux de la balustrade diminuant de longueur irrégulièrement ou par sauts brusques, soit (si l'on exprime la suite dans le sens de l'accroissement) $A < B < C <$, etc., m...ais sans quantification des différences A' (entre A et B), B' (entre B et C), etc. : conformément aux simples structures intensives on a donc $A' < B'$ ou $A' > B'$ aussi bien que $A' = B'$ (ces différences irrégulières étant compatibles avec la sériation $A < B < C$, etc.). Puis, le sujet s'occupe des différences elles-mêmes, et les maintient constantes $A' = B' = C'$, etc. (ce qui donne par ex. $A = 2$ mm, $B = 3$ mm, $C = 4$ mm avec chaque fois 1 mm de différence), ou les accroît régulièrement $A' < B' < C'$ (cet accroissement étant lui-même susceptible de se conformer à une loi). En cet exemple simple, on constate de manière évidente la nature de la quantification extensive, qui est d'être une mise en rapport des

différences (si l'on s'exprime dans le langage des relations) ou des parties A et A' d'un même tout B (si l'on emploie le langage des éléments). Bien entendu, ces expressions de « différences » ou de « partie » et de « tout » n'ont de sens que relativement aux groupements précédents, sans quoi toute mise en relation pourrait être considérée comme portant sur des différences ou des parties d'un même tout.

Dans le cas des proportions, le processus est plus complexe, mais d'autant plus instructif par ses analogies avec le précédent. Partant de la correspondance co-univoque (groupements VII et VIII) entre les côtés A_1 et A_2 d'un triangle et la largeur de sa base A considérée comme l'intervalle entre les deux côtés de l'angle du sommet, l'enfant découvre qu'en allongeant les côtés de A'_1 et de A'_2 (d'où $A_1 + A'_1 = B_1$ et $A_2 + A'_2 = B_2$, B_1 et B_2 étant la longueur des nouveaux côtés) on obtient une base B telle qu'il existe un rapport de parallélisme entre A et B ; il comprend alors tôt ou tard que si A et B sont parallèles, c'est-à-dire construites selon un même rapport, il existe une proportion entre le rapport de A'_1 et A'_2 et celui de A_1 et A_2 . Autrement dit, ici encore il y a quantification des différences comme telles, et mise en relation des parties (A_1 et A'_1 ou A_2 et A'_2) d'un même tout (B_1 ou B_2).

La quantification extensive apparaît donc comme une mise en relation, des parties d'un même tout entre elles, qui prolonge en un sens simplement les opérations intensives, mais en annonçant, d'autre part, la métrique, puisque les différences peuvent être soumises à des rapports définis. Par exemple dans l'accroissement de longueur d'un objet lointain qui se rapproche, alors que la sériation intensive donne simplement $A > B > C \dots$ et la quantification des différences peut être exprimée d'emblée par les égalités $A' = B' = C = \text{etc.}$, et nous sommes alors près d'une métrique par opposition au simple accroissement $A' < B' < C'$, etc.

La quantification métrique ou mesure apparaît, en effet, sitôt qu'une grandeur est choisie comme unité et que les différentes parties d'un même tout sont rapportées à cette unité : par exemple si $A = A' = B'$, etc., on a alors $A + A' = 2A$, donc $B = 2A$; $C = 3A$, etc. Mais cette itération d'une unité supposant que l'on reporte la partie A sur les parties A' , B' , etc., pour les égaliser par congruence, il est immédiatement visible que la mesure est une synthèse de l'addition partitive ($A + A' = B$) et de celle des déplacements ($A \rightarrow B \rightarrow C$, etc.), exactement comme le nombre entier s'est montré constituer une

synthèse de l'addition des classes ($A + A' = B$) et de celle des relations asymétriques¹ ($A \rightarrow B \rightarrow C$). La mesure concrète constitue donc la synthèse des opérations infralogiques dans le même sens que le nombre est la synthèse des opérations logico-arithmétiques. Mais il va de soi que l'on ne saurait se contenter de cet aperçu schématique, et une analyse précise est nécessaire pour montrer comment les choses se passent dans la réalité du développement génétique, ce que nous ferons dans un ouvrage ultérieur.

Seulement cette construction des quantités extensives et métriques soulève d'ores et déjà un problème de chronologie génétique, comme d'ailleurs l'ensemble des opérations décrites en cet aperçu final, et c'est par la discussion de ce problème qu'il nous faut conclure. Les quantités extensives et métriques supposent la construction préalable de l'ensemble des opérations infralogiques de caractère extensif (ou du moins des opérations de type I et II constitutives de l'espace euclidien). Mais nous avons vu sur bien des points la mesure apparaître presque aussitôt ces opérations constituées, tandis que les opérations intensives mettent des années à se former. En second lieu, les quantités extensives et métriques se construisent en même temps, et non pas l'une avant l'autre. En troisième lieu, et c'est là qu'est sans doute le fait le plus paradoxal, les opérations projectives et euclidiennes, ainsi que les opérations intermédiaires (construction des parallèles dans les transformations affines et similitudes des triangles par parallélisme des côtés ou superposition des angles), apparaissent à peu près toutes au même stade III (et les principales dès le niveau III A) ; de plus elles supposent toutes la construction préalable des opérations topologiques élémentaires : or, celles-ci ne sont précisément achevées (et encore dans le fini, car l'infini n'est entrevu qu'au stade IV) qu'au début du stade III (avec une certaine avance, il est vrai, pour les opérations d'ordre).

Ne pourrait-on donc pas renverser complètement l'ordre génétique que nous avons cru discerner, et en tout cas l'ordre de présentation que nous avons adopté ? Supposons un expérimentateur n'ayant rien lu des travaux des géomètres et abordant l'étude de l'espace enfantin aux environs de 7 ans, c'est-à-dire à ce début du stade III, qui se révèle si décisif dans le développement. Ne découvrirait-il pas en premier lieu les opérations

1. Voir PIAGET et SZEMINSKA, *La genèse du nombre chez l'enfant*, Delachaux, et PIAGET, *Classes, relations et nombres*, Vrin, 1942.

euclidiennes, même métriques, et n'examinerait-il pas qu'ensuite les notions projectives et affines, pour ne considérer qu'enfin les quelques rapports topologiques (qu'il aurait d'ailleurs peine à discerner lui-même s'il n'avait pas lu Poincaré, Kuratowski, Godeaux, Gonseth et d'autres) ; et encore ne les regarderait-il pas comme des abstractions momentanées, dont l'enfant ne serait capable qu'en marge de ses constructions ordinaires ? Or à une telle objection, il est possible de répondre trois choses, qui justifient en particulier un ordre génétique débutant par la topologie et se poursuivant simultanément par le projectif, l'euclidien et les notions intermédiaires.

Le premier fait à invoquer est l'ordre de formation des intuitions préopératoires. Un système opératoire et notamment un « groupement » simplement intensif constituant, en effet (§1), l'état final d'équilibre mobile d'un ensemble d'actions d'abord matérielles et irréversibles, puis intériorisées en intuitions plus souples, mais toujours incomplètes et irréversibles, qui aboutissent enfin à ce niveau de composition réversible qu'est le groupement (ou le groupe). Dès lors, pour reconstituer l'ordre génétique d'un développement aussi complexe que celui de l'espace, il ne faut pas se borner à déterminer l'apparition des systèmes opératoires achevés, mais il convient de retracer leur embryologie depuis les intuitions initiales. Or, de ce point de vue, le primat du topologique est évident : l'enfant de 2-3 ans réduit les carrés et les triangles, comme les cercles, à des « courbes de Jordan » et s'occupe de leur fermeture bien avant de s'intéresser aux droites, aux angles ou à leur absence ; le voisinage et l'ordre le retiennent bien avant les axiomes euclidiens ; l'intuition des dimensions fondée sur l'intériorité ou l'extériorité par rapport à une surface ou à une boîte fermées quelconques est bien plus précoce que l'abstraction d'une surface euclidienne (voir les dessins du niveau de l'eau au stade I du chap. XIII) ou que la notion euclidienne d'un volume. Bref, les opérations topologiques jouent leur rôle formateur bien avant d'avoir atteint leur niveau opératoire achevé et elles interviennent déjà à l'état d'intuitions représentatives ou d'actions matérielles.

Le second fait à considérer est que, si la période de formation d'un système opératoire est fort longue, pour les raisons que l'on vient de rappeler, le même système, sitôt constitué en son état d'équilibre mobile, c'est-à-dire sous sa forme de composition indéfinie et réversible, donne lieu, avec une grande rapidité, à une série de regroupements nouveaux, entraînés par ses

propres implications. C'est pourquoi il ne faut pas s'étonner, dans le développement de l'espace chez l'enfant, de l'existence de deux situations, qui pourraient paraître paradoxales sans cette sorte de réorganisation générale déclenchée par l'achèvement (ou l'arrivée au point d'équilibre) des opérations topologiques élémentaires. D'une part, cette constitution d'un système achevé d'opérations entraîne aussitôt la cristallisation des intuitions projectives et euclidiennes, jusque-là fragmentaires, et amorce leurs organisations respectives d'ensemble, qui s'achèvera au niveau III B. D'autre part, sitôt les premiers systèmes d'opérations projectives et euclidiennes rendues possibles par l'achèvement de leur substructure topologique (en particulier par les groupements d'ordre), le passage s'effectue très rapidement de l'intensif à l'extensif et au métrique (puisque les notions extensives et métriques résultent d'une simple synthèse, nouvelle à titre de synthèse seulement, des notions intensives préalables). S'il y a ainsi contraste entre les cinq années de préparation caractérisant les stades I et II (de 2 à 7 ans à peu près) et les deux années d'organisation s'étendant entre les débuts des niveaux III A et III B (de 7 à 9 ans en moyenne), il y a donc là un phénomène explicable, et d'autant plus aisément qu'il n'est pas spécial à l'espace et nous est déjà connu par nos recherches antérieures sur le nombre, les quantités physiques, le temps et la vitesse (sans parler des phénomènes de maturation qui peuvent renforcer le pouvoir fonctionnel de l'intelligence et accélérer un développement dont l'aspect structural leur échappe en partie).

Enfin, le troisième fait, qui est fondamental, tient à la nature même des opérations : un système opératoire tire sa substance d'une série d'abstractions effectuées à partir de l'action du sujet, et non pas des caractères donnés des objets, mais pouvant être facilitées ou au contraire retardées par les contextes dus aux assemblages d'objets sur lesquels portent les actions ou les opérations. C'est ainsi que le nombre est plus précoce que la mesure spatiale, parce que la discontinuité des collections discrètes suggère davantage l'itération de l'unité qu'un continu linéaire ou à deux dimensions ; mais inversement un quadrillage régulier favorisera l'utilisation d'une métrique spatiale par opposition à un ensemble de perles entassées évaluables simplement en plus ou en moins et non pas numériquement. Il en résulte que l'étude d'un système opératoire au moyen d'épreuves concrètes, telles que celles utilisées en cet ouvrage, aboutit à des résultats toujours en partie relatifs au contexte de l'expé-

rience, ce qui complique leur analyse. Mais il en résulte aussi qu'une opération peut déjà intervenir sous une forme implicite avant d'avoir été entièrement abstraite. Supposons par exemple qu'une opération B (par exemple une proportion métrique ou extensive) implique l'opération préalable A (une multiplication de relations par correspondance co-univoque), mais que l'on étudie B en un contexte plus facile que A (par exemple selon des rapports numériques simples suggérés par le quadrillage du papier, tandis que les questions portant sur A seront énoncées trop abstraitement). On peut avoir en ce cas l'impression que B précède A, tandis qu'une analyse plus poussée rétablira l'ordre génétique réel, en montrant que l'utilisation par le sujet de l'opération B implique en fait sa connaissance de A.

Ces troisièmes considérations ont d'ailleurs une portée beaucoup plus générale et dépassent la simple étude psychologique de l'enfant. Elles tiennent aux rapports de la construction génétique réelle et de la réflexion après coup, celle-ci inversant fréquemment l'ordre de celle-là. Ce n'est pas par hasard que la topologie ou *Analysis situs* n'a vu le jour, à titre de discipline autonome, que si récemment, de même que la théorie des ensembles, dont Cantor disait cependant, à ce qu'il paraît, qu'on pourrait l'enseigner à l'école primaire. C'est que, si l'enfant invente chaque jour des correspondances bi-univoques et dessine, dès la nursery, des courbes de Jordan, il a fallu une réflexion singulièrement abstraite pour découvrir, en ces opérations enfantines, le fondement le plus général de l'arithmétique et de la géométrie. Il ne convient pas de s'étonner que, dans le développement individuel lui-même, certains chevauchements puissent parfois se produire dans l'ordre régulier d'apparition des mécanismes opératoires, car, sur ce terrain aussi, ils peuvent être dus aux conflits de la prise de conscience ou de la réflexion qui abstrait, favorisée par certains contextes mais retardée par d'autres, et de l'action réelle dont les opérations sont tirées par abstractions successives. C'est pourquoi il est utile de combiner l'analyse expérimentale et psychologique avec la schématisation logistique, si délicate que soit une telle méthode, dont l'emploi a conservé, au cours de tout cet ouvrage, un but purement génétique.